

Intégration

1. Intégrales définies.

Subdivision. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *subdivision de l'intervalle* $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

On appelle *pas de la subdivision* σ le nombre

$$\delta(\sigma) = \max_{i=0, \dots, n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Fonction en escalier. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Une telle subdivision σ est dite alors *bien adaptée à f* .

Intégrale d'une fonction en escalier. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction en escalier, $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision bien adaptée à f , $c_i \in \mathbb{C}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $f \equiv c_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. La valeur

$$I(\sigma, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i$$

est indépendante de la subdivision σ bien adaptée à f . On la note $\int_a^b f(x) dx$ et on l'appelle *intégrale de f entre a et b* .

On a de plus

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \|f\|_\infty \text{ où } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Fonctions continues par morceaux. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f sur $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

⊕ **Les fonctions continues par morceaux sont limites uniformes de fonctions en escalier.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors il existe une suite de fonctions en escalier $(f_n)_n$ sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f .

Intégrales des fonctions continues par morceaux. Il découle de l'énoncé précédent que la suite

$$\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n$$

est une suite de Cauchy et que sa limite est indépendante de la suite (f_n) approximant f . Cette limite est appelée l'intégrale entre a et b de f .

On vérifie facilement que l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle

Exercice 1.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > 0$. Montrez que

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Indication. Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f , il existe un intervalle I de $[a, b]$ contenant x_0 sur lequel on a $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$. En déduire que $\int_a^b f(x) dx \geq \ell(I) \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Exercice 1.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrez que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

et que l'on a égalité si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue tels que $f(x) = \varphi(x)e^{i\theta}$. *Indication.* Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, c'est clair.

Sinon, poser $\gamma = \left| \int_a^b f(x) dx \right| / \int_a^b |f(x)| dx$ et montrez que $\operatorname{Im} \int_a^b g(x) dx = 0$ avec $g = \gamma f$.

Primitive d'une fonction continue. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive (*i.e.* une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$) et que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Remarque. Les primitives de f ne sont pas toutes de la forme $\int_a^x f(t) dt$. Par exemple, $\pi + \arctan x$ est une primitive de $1/(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas de cette forme.

Remarque. Une fonction continue par morceaux n'admet pas en général de primitive. Par exemple, la fonction définie sur $[0, 1]$ et qui vaut 0 sur $[0, 1/2[$ et 1 sur $[1/2, 1]$. En effet, si une fonction est dérivable, la dérivée possède la propriété des valeurs intermédiaires (cf. [Go], p. 76-77).

Exercice 1.3. Lemme de Gronwall [CM] p. 127. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Indication. L'astuce est classique : poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Alors $(F(x)e^{-kx})' \leq 0$.

⊕ **Intégration par parties.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 . Alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

⊕ Soit aussi $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 . Alors

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

⊕ **Changement de variables.** Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue telle que $\varphi([a, b]) \subset I$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

⊕ **Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^n . Alors

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Exercice 1.4. Lemme de Riemann-Lebesgue. [(D: 1, 2, 35, 47)]

On se propose de montrer que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{inx} dx = 0.$$

1. Montrer le résultat si f est C^1 (intégrer par parties.)
2. Montrer le résultat si f est en escalier.
3. En déduire le résultat pour f continue par morceaux.
4. Une application : la preuve la plus élémentaire du fait que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ([FJ], p. 123) Montrez qu'il existe α et β réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos nt \, dt.$$

En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Exercice 1.5. [Go], p.128. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrez que $\left(\int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{1/n}$ converge vers $\|f\|_\infty$.

Indication. Il est clair que $\left(\int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{1/n} \leq (b-a)^{1/n} \|f\|_\infty$. Dans l'autre sens, écrire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $|f(c)| = \|f\|_\infty$ et dire que pour tout ε , il existe un intervalle contenant c sur lequel $|f(t)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$.

Exercice 1.6. Intégrales de Wallis. (1656) [Go], p.127. On pose

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Indication. Ecrire que, pour $n \geq 2$, on a

$$I_n = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

et intégrer par parties en utilisant le fait que $\frac{\sin^{n-1} x}{n-1}$ est une primitive de $\sin^{n-2} x \cos x$.

Montrez que (I_n) décroît, que $nI_n I_{n-1}$ est constant et que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 1.7. Irrationalité de π [FGN1] p.22 [(D: 23, 35, 47)] (Pour aller beaucoup plus loin, voir [Go2], p.99). Supposons $\pi = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx.$$

Montrer que pour tout n , $I_n > 0$, I_n tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $f_n^{(k)}(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}$ (Remarquer que $f_n(\frac{p}{q} - x) = f_n(x)$).

En intégrant par parties, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$ et en déduire une contradiction.

Remarque. la preuve originelle de Lambert (1767) utilisait les fractions continues. La preuve présentée ici, qui est la preuve la plus simple de l'irrationalité de π , a été donnée en 1947 par Niven ([Ni]). Cette technique a été inventée par Hermite en 1873 pour prouver la transcendance de e

2. Sommes de Riemann

⊕ **Sommes de Riemann.** Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à f relativement à cette subdivision toute somme

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$.

⊕ **Théorème.** Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, les sommes de Riemann associées à f convergent quand le pas de la subdivision tend vers 0 vers l'intégrale de f sur $[a, b]$.

⊕ **Remarque.** En particulier, pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, la suite

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$$

converge vers $\int_a^b f(x)dx$.

Exercice 2.1. Sommes de Riemann. Convergence et calcul de la limite des suites :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad ([Go], \text{ p. 124})$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan \frac{k}{n}, \quad \sum_{k=1}^n \tan \frac{1}{n+k} \quad ([Gr], \text{ p.19})$$

Indication. Pour la dernière, on pourra utiliser le fait que $\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) = x + \mathcal{O}(x^3)$.

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n}, \quad \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 2.2 Estimation de l'erreur quand f est C^1 .

Montrez que, pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , (cf. [Go], p.132-133)

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n} (f(1) - f(0)) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication. Poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, écrire que

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

et qu'il existe $\theta_{k,n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ tel que $F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'(\theta_{k,n})$.

Exercice 2.3. Intégrale de Poisson ([Go], p.181.) Pour $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculez en utilisant les sommes de Riemann

$$I(\rho) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2) d\theta.$$

Indication. Ecrire que $I(\rho) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^n (1 - 2\rho \cos \frac{k\pi}{n} + \rho^2) \right)$ et factoriser $z^2 - 2z \cos \theta + 1$.

Autre méthode ([ADT], p. 225). Montrez que $I(\rho)$ est bien définie pour $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que $I(\rho) \sim 2\pi \ln \rho$ en $+\infty$ et que $\lim_0 I = 0$. Montrer que I est une fonction paire de ρ et que, pour tout $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $I(\rho^2) = 2I(\rho)$. En déduire la valeur de $I(\rho)$ en tout $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

3. Calcul des primitives.

Rappels des techniques de calcul des primitives.

⊕ *Fraction rationnelle : décomposer en éléments simples.*

Exemple : primitives de $\frac{x+1}{(x^2+x+1)^3}$.

⊕ *Polynôme en $\cos x$ et $\sin x$: on pose $u = \sin x$ ou $u = \cos x$ ou alors on linéarise.*

Exemples : primitives de $\cos^3 x \sin^4 x$ et de $\cos^4 x$.

⊕ *Fraction rationnelle de $\cos x$ et $\sin x$. Règle de Bioche : si $R(\sin x, \cos x)dx$ est inchangé en changeant x en $\pi - x$, poser $t = \sin x$; si c'est inchangé en changeant x en $-x$, poser $t = \cos x$; si c'est inchangé en changeant x en $\pi + x$, poser $t = \tan x$. Si la règle de Bioche ne donne rien, poser $t = \tan(x/2)$, le calcul se ramène à celui de la primitive de $R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2dt}{1+t^2}$.*

Exemples : primitives de $\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sin x}$ et $\frac{1}{\cos x}$.

⊕ *Fraction rationnelle en e^x . On pose $u = e^x$.*

Exemples : primitives de $\frac{1}{1+e^x}$.

⊕ *Cas particulier des fractions rationnelles en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$. Appliquer la règle de Bioche bis : remplacer formellement $\operatorname{ch} x$ par $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ par $\sin x$ et $\operatorname{th} x$ par $\tan x$. Revenir alors aux fonctions hyperboliques classiques en faisant la transformation inverse. Si la règle de Bioche bis ne donne rien, poser $t = \operatorname{th}(x/2)$, le calcul se ramène à celui de la primitive de*

$$R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{2dt}{1-t^2}.$$

⊕ *Fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$; on pose $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.*

Exemple : primitive de $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

⊕ Fraction rationnelle en x et ${}^{n_1}\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, {}^{n_p}\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$; on pose $u = {}^n\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ avec $n = \text{ppcm}(n_1, \dots, n_p)$.

Exemple : primitive de $\frac{1}{\sqrt{x} + {}^3\sqrt{x}}$.

⊕ Intégrales abéliennes, ie. les primitives de $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ où R est rationnelle. On se ramène à des intégrales contenant $\sqrt{a^2-x^2}$ ou $\sqrt{a^2+x^2}$. Dans le premier cas, on pose $u = a \cos x$, dans le second, $u = a \operatorname{sh} x$. Voir d'autres astuces dans [Go], p.140.

Exemples : primitives de $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}, \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

⊕ Cas des fonctions dont la dérivée est une fraction rationnelle ou appartient à l'un des types étudiés précédemment : on intègre par parties.

Exemples : primitives de $\arctan x, \ln x, \arcsin x, \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}, \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$.

4. Révisions sur les intégrales généralisées.

Définition des intégrales convergentes. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b[$ où b est un nombre réel ou $+\infty$, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur tout segment fermé borné inclus dans I . On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si et seulement si la limite quand $x \rightarrow b$ de $\int_a^x f(t)dt$ existe. On note $\int_a^b f(t)dt$ cette limite. Sinon, on dit que cette intégrale est divergente.

Le cas où I est de la forme $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ est analogue.

Soient enfin I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$, où a est un nombre réel ou $-\infty$ et b est un nombre réel ou $+\infty$, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur tout segment fermé borné inclus dans I . On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente s'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que les intégrales de f sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$ soient convergentes. Alors, pour tout point c' de $]a, b[$, les intégrales de f sur $]a, c']$ et sur $[c', b[$ sont convergentes, et

$$\int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

La valeur commune des deux membres se note $\int_a^b f(t)dt$.

⊕ **Critère de Riemann.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.$$

⊕ **Règle de comparaison.** Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur tout segment fermé borné inclus dans $[a, b[$.

1. Si $f = O(g)$ au voisinage de b et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.
2. Si $f \sim g$ au voisinage de b , $\int_a^b g(x)dx$ converge si et seulement si $\int_a^b f(x)dx$ converge.

⊕ **Critère de Bertrand.** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \text{ converge si et seulement si } (\alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \text{ converge si et seulement si } (\alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)).$$

⊕ **Intégrales absolument convergentes.** Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument si et seulement si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

Une intégrale absolument convergente est convergente. (deux preuves de cela : une utilisant le critère de Cauchy et l'autre utilisant le fait que si u est une fonction à valeurs réelles, $0 \leq |u| - u \leq 2|u|$).

On dit qu'une intégrale est semi-convergente si elle est convergente et n'est pas absolument convergente.

⊕ **Règle d'Abel.** Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^1 et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a, b[$ telle que f soit décroissante et tend vers 0 en b , et il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b[$,

$$\left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq M.$$

Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

Remarque. La règle d'Abel est encore vraie si f est seulement continue, mais la preuve de ce résultat nécessite l'utilisation de la seconde formule de la moyenne (voir [Go], p. 149).

Exercice 4.0. Contre-exemples. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

1. Est-ce que $\lim_{+\infty} f = 0$ implique la convergence de $\int_0^\infty f(x)dx$?

2. Est-ce que la convergence de $\int_0^\infty f(x)dx$ implique $\lim_{+\infty} f = 0$?
 3. Est-ce que le résultat de la règle de comparaison est vrai si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$? Et si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$?
-

Exercice 4.1. Est-ce que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

est convergente ? absolument convergente ? semi-convergente ?

Exercice 4.2. Exemples d'application des techniques précédentes pour déterminer la convergence d'intégrales généralisées.

1. Critère de Riemann ou de Bertrand :

$$1. \int_0^\infty \frac{(\ln t)^2}{t^2} dt \quad 2. \int_0^1 |\ln t|^\alpha dt \quad 3. \int_1^\infty \frac{dt}{(\ln t)^\alpha} \quad 4. \int_0^1 x^\alpha \ln x \, dx$$

2. Théorème de Comparaison :

$$\begin{aligned} 5. \int_1^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt \quad & 6. \int_0^\infty \frac{\operatorname{th} x}{x} dx \quad & 7. \int_0^\infty \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(e^{-x}) dx \\ 8. \int_1^\infty \frac{dx}{(\ln x)\sqrt{x^2+1}} \quad & 9. \int_0^\infty e^{-x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} dx \quad & 10. \int_0^\infty \frac{x \, dx}{\operatorname{sh} x} \\ 11. \int_0^1 x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad & 12. \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \end{aligned}$$

3. Changement de variable

$$13. \int_0^\infty x^\alpha e^{-\sqrt{x}} dx$$

4. Utilisation des développements limités

$$\begin{aligned} 14. \int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx \quad & 15. \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^\alpha} dx \\ 16. \int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t} dt \quad & 17. \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^\alpha}} \end{aligned}$$

5. Utilisation de la règle d'Abel

$$18. \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx \quad 19. \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \quad 20. \int_2^\infty \frac{e^{ix}}{x \ln x} dx$$

$$21. \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x \ln x} dx \quad 22. \int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx \quad 23. \int_1^\infty \tan\left(\frac{1}{x}\right) \sin x \, dx$$

($\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ s'expriment en fonction de $\cos 2x$).

6. Changement de variable et Règle d'Abel

$$24. \int_0^\infty e^{ix^2} dx \quad 25. \int_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

7. Plusieurs intégrations par parties

$$26. \int_0^\infty f(t) dt \quad \text{avec} \quad f(t) = \int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

8. Minoration par une série divergente

$$27. \int_0^\infty e^{-x \sin x} dx \quad 28. \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x \ln x} dx$$

$$29. \int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx \quad 30. \int_0^\infty |\sin x|^x dx$$

Indications : 27. Regarder la fonction à intégrer sur les intervalles $[5\pi/4 + 2n\pi, 7\pi/4 + 2n\pi]$; 28 et 29. Regarder les intervalles $[\pi/4 + n\pi, 3\pi/4 + n\pi]$. 30. Penser aux intégrales de Wallis.

Exercice 4.3. ([Go], p.155). Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Soient deux nombres réels strictement positifs a et b . Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ converge et calculer sa valeur. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{u^a - u^b}{\ln u} du$$

pour $a, b > -1$.

Exercice 4.4. ([Ra], p.194). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant les limites ℓ en $+\infty$ et ℓ' en $-\infty$. Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+1) - f(x))dx$.

Exercice 4.5. Intégrale d'Euler ([Go], p.175). Montrez que les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

convergent et qu'elles sont égales. En les additionnant, et en faisant un changement de variable, calculer leur valeur.

Exercice 4.6. ([Go], p.154).

- a. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Attention ! La fonction n'est pas nécessairement intégrable au sens de Riemann. Utiliser la croissance de la fonction sur les intervalles $[k/n, (k+1)/n]$ pour $k \in \{1, \dots, n-2\}$.

- b. Exemple : calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}. \quad ([Ra], \text{p.60})$$

- c. Application. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Exercice 4.7. ([Go], p. 154).

- a. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ converge et est non nulle. Pour tout $t > 0$, prouver la convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$$

et donner un équivalent de cette dernière expression lorsque $t \rightarrow 0+$.

- b. Application. Donner un équivalent, lorsque $x \rightarrow 1-$, de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$.

Exercice 4.8. Intégration des relations de comparaison.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction positive sur $[a, +\infty[$. Montrez qu'on a les résultats suivants au voisinage de $+\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^{+\infty} g = +\infty \\ \int_a^{+\infty} g < +\infty \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} f = o(g) \Rightarrow \int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right) \\ f = O(g) \Rightarrow \int_a^x f = O\left(\int_a^x g\right) \\ f \sim g \Rightarrow \int_a^x f \sim \int_a^x g \end{array} \\ \begin{array}{l} f = o(g) \Rightarrow \int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right) \\ f = O(g) \Rightarrow \int_x^{+\infty} f = O\left(\int_x^{+\infty} g\right) \\ f \sim g \Rightarrow \int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g \end{array} \end{array} \right.$$

Quelques applications : Montrez que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{et que} \quad \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = o(\sqrt{x}).$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{2x^3 + 1} \sim \frac{1}{2x} \quad \text{et que} \quad \int_1^x \frac{t^2 - t + 1}{2t^3 + 1} dt \sim \ln \sqrt{x}.$$

5. Théorèmes de convergence et intégrales à paramètres dans le cadre de l'intégrale de Riemann.

Le théorème fondamental est le suivant :

- ⊕ **Théorème.** Soit $a < b$ deux réels et (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 par morceaux qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f de classe C^1 par morceaux. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Il découle de ce théorème les trois théorèmes suivants :

- ⊕ **Théorème de continuité sous le signe somme pour un intervalle compact.**

Soient $a < b$ deux réels, (E, d) un espace métrique, et $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{C}$.

Si

- f est continue sur $[a, b] \times E$,

alors

- l'application $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est continue sur E .

- ⊕ **Théorème de dérivation sous le signe somme pour un intervalle compact.**

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{C}$ est telle que

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a, b] \times I$,

alors

- l'application $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est de classe C^1 sur I et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

- ⊕ **Théorème d'holomorphie sous le signe somme pour un intervalle compact.**

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et telle que

- $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe,

alors

- l'application $F(z) = \int_a^b f(t, z) dt$ est holomorphe sur U et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(t, z) dt.$$

Exercice 5.0. Contre-exemples

1. Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in [n^2 - n, n^2 + n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers 0. A-t'on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f_n(t) dt = 0 ?$$

Conclusion.

2. Soit $(f_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f_n(x) = nx^{n-1}$ si $x \in [0, 1[$ et $f_n(1) = 0$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. A-t'on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0 ?$$

Conclusion.

Exercice 5.1. Autre méthode pour le calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Considérer $F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ et étudier F (domaine de définition, continuité, dérivabilité, etc...).

Exercice 5.2. Autre méthode pour le calcul de l'intégrale de Gauss ([Go], p.163 et [Ra], p. 121). On pose

$$F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

Montrez que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $G'(x)$ et en déduire une expression de $G(x)$ en fonction de $F(x)$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

6. Révisions sur la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Définition. La *mesure extérieure* de tout intervalle I (ouvert, fermé ou semi-ouvert) et ayant pour extrémités $a < b$ est le nombre réel positif $b - a$. On le note $m^*(I)$

On étend la mesure extérieure à tous les ouverts de $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

Proposition et définition. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts $]a_n, b_n[$ pour $n \in \mathbb{N}$. Cette écriture est unique. La mesure extérieure d'un tel ouvert sera alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n).$$

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ borné. La mesure extérieure de A est

$$m^*(A) = \inf\{m^*(U), U \text{ ouvert et } A \subset U\}.$$

Si $A \subset [a, b]$, la mesure intérieure de A est $m_*(A) = (b - a) - m^*([a, b] \setminus A)$. Si maintenant A est non borné, les mesures extérieure et intérieure de A sont

$$m^*(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m^*(A \cap [-n, n]) \text{ et } m_*(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_*(A \cap [-n, n])$$

On dit que A est mesurable si et seulement si $m_*(A) = m^*(A)$. On note $m(A)$ la valeur commune. $m(A)$ est la mesure de Lebesgue de A .

L'ensemble des mesurables forme une tribu (*cf.* ci après) et la mesure de Lebesgue est une mesure (*cf.* ci-après).

Définition. Soit Ω un ensemble et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On note $A^c = \Omega \setminus A$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une *tribu* si

- (1) $\Omega \in \mathcal{T}$
- (2) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$
- (3) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un *espace mesurable* et que tous les éléments de $\mathcal{T}$ sont les ensembles *mesurables*.

On appelle *mesure positive* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute fonction $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$
- (2) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}},$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un *espace mesuré*. Si $\mu(\Omega) < +\infty$, on dit que μ est une mesure *finie*.

Si $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ où $\mu(A_n) < \infty$, on dit que μ est σ -finie.

Mesure de Lebesgue sur $[a, b]$. On prend $\Omega = [a, b]$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{M}_{[a,b]}$ des sous-ensembles mesurables de $[a, b]$ pour la mesure de Lebesgue m . $([a, b], \mathcal{M}_{[a,b]}, m)$ est un espace mesuré, et m est une mesure finie.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On prend $\Omega = \mathbb{R}$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue m . $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, m)$ est un espace mesuré, et m est une mesure σ -finie.

Mesure de Dirac en un point. Soit Ω un ensemble muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$, on définit la mesure de Dirac en a par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A \in \mathcal{T}$ et par $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A \in \mathcal{T}$.

Mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. On prend $\Omega = \mathbb{N}$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ_d est la mesure de comptage, c'est-à-dire que $\mu_d(A)$ est égal au cardinal de A , pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ est un espace mesuré, et μ_d est une mesure σ -finie.

Caractérisation des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. On appelle *tribu borélienne de $\mathbb{R}$* ou *tribu des boréliens* la plus petite tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$.

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est *négligeable* si et seulement si, pour tout ε , il existe une suite d'intervalles dont la réunion contient A et dont la somme des longueurs est plus petite que ε .

Les ensembles mesurables dans $\mathbb{R}$ au sens de Lebesgue sont exactement les ensembles qui sont la réunion d'un borélien et d'un ensemble négligeable.

Fonctions mesurables.

Définition. Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. On dit que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -mesurable (ou plus simplement *mesurable*) si et seulement si,

$$\forall A' \in \mathcal{P}(\Omega'), \quad A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(A') \in \mathcal{T}.$$

Proposition. Soit $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est mesurable.

⊕

Théorème de la convergence monotone ou théorème de Beppo-Levi. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur (Ω, μ) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- La suite $(f)_n$ est croissante presque partout à partir d'un certain rang.

Alors :

- $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ existe presque partout et définit une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

⊕ **Corollaire.** Si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables sur (Ω, μ) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

- il existe un rang à partir duquel $u_n \geq 0$ presque partout.

Alors

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_n d\mu.$$

Exercice 6.1. ([Gr], p.141, [LS] p.185) Convergence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt, \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt, \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{t} \ln(1-t) dt.$$

Indication. Développer en série entière.

Exercice 6.2. Approximation ultra-hyper-classique de l'exponentielle.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\frac{-t}{1-t} \leq \ln(1-t) \leq -t$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

pour $t \in [0, n]$, et $f_n(t) = 0$ si $t > n$. Montrez que la suite de fonctions (f_n) est une suite de fonctions croissante qui converge vers $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{-t}$.

Exercice 6.3. Intégrale de Gauss (à partir de [Go], p.163).

1. Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

2. En posant $t = \sqrt{n} \cos u$ et en utilisant les intégrales de Wallis, montrez que

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 6.4. Fonction Γ ([Go], p.290 et p.260). Soit la fonction *Gamma* définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{pour } x > 0.$$

1. Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

4. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
5. Démontrer la *formule de duplication* :

$$\forall x > 0, \quad 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x).$$

⊕ **Théorème de Fatou.** Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de (Ω, μ) dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

- il existe un rang à partir duquel $f_n \geq 0$ presque partout.

Alors

$$\int_{\Omega} \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

⊕ **Théorème de la convergence dominée (Lebesgue 1908-1910).** Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de (Ω, μ) dans $\mathbb{C}$. On suppose que

- pour presque tout $x \in \Omega$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe

et que

- Il existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g \quad \text{presque partout.}$$

Alors

$$f \text{ est intégrable} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Applications aux séries. Soit $(u_n) = f(n)$ une série absolument convergente. Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mu = \mu_d$ est la mesure de comptage, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} f d\mu_d.$$

Théorème de la convergence dominée pour les séries. Soit une famille $(a_n(m))_{n,m \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes. On suppose que

- il existe une suite (c_n) de réels positifs ou nuls telle que $\sum c_n$ converge et telle que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad |a_n(m)| \leq c_n$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} a_n(m) = b_n.$$

Alors

$$\sum |b_n| \text{ converge} \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Exercice 6.5. Contre-exemples.

1. Soit la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, 1]$ pour n pair par $f_n = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$ et pour n impair par $f_n = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$. A-t'on

$$\int_0^1 \liminf f_n(t) dt = \liminf \int_0^1 f_n(t) dt ?$$

2. Soit la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n = \chi_{[\frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}]} - n^2 \chi_{[0, \frac{1}{n}]}.$$

A-t'on

$$\int_0^{\infty} \liminf f_n(t) dt \leq \liminf \int_0^{\infty} f_n(t) dt ?$$

Conclusion.

3. Soit $(f_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f_n(x) = nx^{n-1}$ si $x \in [0, 1[$ et $f_n(1) = 0$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. A-t'on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0 ?$$

Conclusion.

Exercice 6.6. Règle de Weierstrass ([Po], p. 204-205). Soit $u_n(m)$ une suite de nombres complexes indexés par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_n(m) = u_n$, et qu'il existe une suite (v_n) de nombres réels positifs telle que $\sum v_n < \infty$ et telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad |u_n(m)| \leq v_n.$$

Montrez de deux façons différentes que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(m) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Si w_n est une suite de nombre complexes, on dit que le produit $\prod (1 + w_n)$ converge si la suite $\prod_{n=0}^N (1 + w_n)$ converge, et on note sa limite $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + w_n)$. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, montrez que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n(m)) \right) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n).$$

On pourra pour cela, montrer qu'il existe un rang N à partir duquel $v_n < 1$, utiliser le logarithme complexe et prouver que, pour $|z| < 1$, $|\ln(1 + z)| \leq \frac{|z|}{1 - |z|}$.

Exercice 6.7. Une application du principe de Weierstrass : la formule d'Euler ([Ca], p.90-91). Montrez que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{m} \right)^m.$$

On pourra appliquer la règle de Weierstrass, ou alors montrer que

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{m} \right)^m \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m} \right)^m.$$

On définit P_m par

$$P_m(z) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + \frac{iz}{2m} \right)^{2m} - \left(1 - \frac{iz}{2m} \right)^{2m} \right]$$

Trouver les racines de P_m . En déduire que

$$\sin z = z \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 - \frac{z^2}{4m^2 \tan^2 \frac{n\pi}{2m}} \right),$$

puis que

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Montrez (formule dite des compléments) que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

⊕ **Théorème d'intégrabilité termes à termes des séries de fonctions.** Soit (u_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$.

On suppose que

$$\sum \|u_n\|_1 < +\infty.$$

Alors :

- La série de terme général (u_n) converge absolument presque partout ;

- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est définie presque partout et est intégrable ;

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_n d\mu.$$

⊕ **Corollaire.** $L^1(\Omega)$ est complet.

Exercice 6.8. On note $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{H}^+, \quad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

⊕ **Théorème de continuité sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.**

Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et (E, d) un espace métrique. Soit $f : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x) \in L^1(\Omega)$
- Pour presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto f(t, x)$ est continue
- Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \Omega$, $|f(t, x)| \leq g(t)$.

Alors

l'application $F : x \mapsto \int_{\Omega} f(t, x) d\mu(t)$ est continue.

⊕ **Théorème de dérivation sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.**

Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x) \in L^1(\Omega)$
- Pour presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto f(t, x)$ est dérivable.
- Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \Omega$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq g(t)$.

Alors l'application $F : x \mapsto \int_{\Omega} f(t, x) d\mu(t)$ est dérivable, et

$$F'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) d\mu(t).$$

⊕ **Théorème d'holomorphie sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.** Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- Pour tout $z \in U$, $t \mapsto f(t, z) \in L^1(\Omega)$
- Pour presque tout $t \in \Omega$, $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe
- Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $z \in U$, $|f(t, z)| \leq g(t)$.

Alors

l'application $F : z \mapsto \int_{\Omega} f(t, z) d\mu(t)$ est holomorphe dans U , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z^n}(t, z) d\mu(t)$.

Exercice 6.9. Calcul de l'intégrale de Dirichlet ([Po], p. 199).

Posons, pour $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Montrez que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, et que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ (deux intégrations par parties). En déduire que $F(x) = \pi/2 - \arctan x$ (regarder la limite de F à l'infini). Montrez enfin, en intégrant par parties, que

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du - x \int_0^\infty e^{-tx} \left(\int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du \right) dt.$$

Conclure.

Exercice 6.10. Fonction Γ (d'après [V-P], p.204). [(D: 7,23,35,39, 41,45,47)] Soit la fonction *gamma* définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{pour } x > 0.$$

1. Montrer que Γ est bien définie, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que Γ est logarithmiquement convexe (*i.e.* $\log \Gamma$ est convexe. On pourra pour cela montrer qu'une fonction F est logarithmiquement convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si $F'^2 \leq FF''$, et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
3. Donner un équivalent de Γ en $0+$ et tracer son graphe (utiliser la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ obtenue pour $x > 0$ dans l'exercice 5.4).
5. Montrer que Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et calculer les résidus de Γ aux points $-n$ quand $n \in \mathbb{N}$ (utiliser l'exercice 5.12.)

En écrivant que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} z \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-z/k} \right) e^{z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)},$$

en déduire que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Exercice 6.11. Existence et calcul des intégrales de Fresnel.

1. Montrer que les intégrales

$$I = \int_0^\infty \cos t^2 dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\infty \sin t^2 dt$$

convergent en un sens que l'on précisera.

2. On pose, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt^2} dt.$$

Montrer que F est holomorphe sur $H^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$, continue sur $\overline{H^+}$. Calculer F pour z réel strictement positif. En déduire les valeurs de I et J .

7. Intégrales multiples.

Définition. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis. On note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$ où $(A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Il existe une unique mesure notée $\mu_1 \otimes \mu_2$ telle que

$$\forall (A_1, A_2) \in (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2), \quad \mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Cette mesure est la mesure produit de μ_1 et μ_2 .

⊕ **Théorème de Tonelli.** Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis. Soit $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

⊕ **Théorème de Fubini.** Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis. Soit $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(x, y)| d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x, y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x, y)| d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) < +\infty. \end{aligned}$$

Alors :

- pour presque tout $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2 \mapsto f(x, y)$ est intégrable
- pour presque tout $y \in \Omega_2$, $x \in \Omega_1 \mapsto f(x, y)$ est intégrable
- La fonction $x \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ est définie presque partout et intégrable
- La fonction $y \in \Omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ est définie presque partout et intégrable

et on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

C'est en particulier le cas si l'un des nombres

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \quad \text{ou} \quad \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

est fini.

⊕ **Théorème de changement de variable.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(U)$. Soit $\varphi : U' \rightarrow U$ un C^1 -difféomorphisme. Alors

$$\int_{U'} f(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt = \int_U f(x) dx,$$

où $J\varphi(t)$ est le jacobien au point $t \in U'$ de la fonction φ .

Exercice 7.1. Calcul de l'intégrale de Gauss. On note $I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$. Montrez que

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-\|x\|^2} dm_2(x)$$

où dm_2 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. En passant en coordonnées polaires, calculez I .

Exercice 7.2. Calcul de l'intégrale de Fresnel. [Av], p. 335. On se propose de calculer $J = \int_0^\infty e^{-iy^2} dy$.

1. Montrez la convergence de J en un certain sens que l'on précisera. On note I l'intégrale de Gauss de l'exercice 1.
2. Montrez que, pour tout $y \in]0, +\infty[$,

$$I e^{-iy^2} = \int_0^\infty e^{-y^2(t^2+i)} y dt.$$

3. Montrez que, pour $A > 0$,

$$I \int_0^A e^{-iy^2} dy = \int_0^\infty \left(\int_0^A e^{-y^2(t^2+i)} y dy \right) dt.$$

4. Conclure.

8. Exercices Complémentaires.

Exercice 8.1.1. Le calcul le plus simple de la somme harmonique alternée. Montrez que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Calculer la somme de la série en remarquant que $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1} dt$.

Exercice 8.1.2. Première formule de la moyenne ([Go], p.122 et 127) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux. Montrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Est-ce vrai si g n'est pas positive ? Cette formule est appelée *première formule de la moyenne*.

Exercice 8.1.3. Lemme de Riemann-Lebesgue généralisé ([Go], p.131). Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et T -périodique et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \varphi(t)dt \right) \left(\int_a^b f(t)dt \right).$$

Indication. Comme dans l'exercice 1.4, traiter d'abord le cas où f est en escalier.

Exercice 8.1.4. Intégrales de Wallis généralisées [BBR], p.127. [(D:23, 35, 39, 41, 47)]

1. Soient $a < b$ et $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, positive et strictement décroissante. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b f(t)u^n(t)dt}{\int_a^b u^n(t)dt} = f(a).$$

Indication. Retrancher $f(a)$ à f , utiliser la continuité de f en a et l'exercice 1.8.

2. On pose

$$I_k(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t \cos 2xt dt.$$

Trouver pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$ une relation de récurrence entre $I_k(x)$ et $I_{k+1}(x)$. On pourra pour cela écrire que

$$I_{k+1}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t (1 - \sin^2 t) \cos 2xt dt,$$

montrer que

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{I_{k+1}(x)}{2k+1} + 2x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2k+1} t}{2k+1} \sin t \sin 2xt \, dt,$$

puis que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t \sin t \sin 2xt \, dt = \frac{x}{k+1} I_{k+1}(x).$$

Etudier $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{I_k(x)}{I_k(0)}$ (utiliser la question 1) et en déduire que

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right).$$

Remarque. La preuve originelle d'Euler 1740 du fait que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ utilisait la formule précédente. L'idée était de dire que

$$\frac{\sin \pi \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}} = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{p^2}\right).$$

De la même manière que la somme des inverses des racines $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$ d'un polynôme (cf. [HW] p.63).

$$P(z) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) = 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

vérifie

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_j} = -a_1,$$

on déduit formellement du développement

$$\frac{\sin \pi \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}} = 1 - \frac{\pi^3 \sqrt{x}^3}{6\pi \sqrt{x}} + \dots$$

la valeur de $\zeta(2)$.

Exercice 8.1.5. Irrationalité de $\tan r$ et de e^r pour r rationnel [MZ]. [(D : 23, 35, 47)]

1. Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Supposons $r = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et supposons que $\tan \frac{r}{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$.

Pour $n \geq 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{(rx - x^2)^n}{n!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^r f_n(x) \sin x \, dx.$$

- a. Montrez que $b^n I_n$ converge vers 0.
b. Calculer I_0 et I_1 . Montrez que pour tout $n \geq 2$,

$$I_n = - \int_0^r f_n''(x) \sin x \, dx.$$

Montre que, pour tout $n \geq 2$, il existe des réels λ_n et μ_n dépendants de n et de r tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) = \lambda_n f_{n-1}(x) + \mu_n f_{n-2}(x).$$

En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$I_n = (4n - 2)I_{n-1} - r^2 I_{n-2}.$$

c. Montrez que pour tout $n \geq 0$,

$$I_n = P_n(r)(1 - \cos r) + Q_n(r) \sin r$$

où P_n et Q_n sont des polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ et de degrés inférieurs ou égaux à n .

d. Montrez que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad I_n \neq 0.$$

En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad b^n q \frac{I_n}{\sin r} = b^n q \left(P_n(r) \tan \frac{r}{2} + Q_n(r) \right) \in \mathbb{Z}^*.$$

e. Montrez que pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$, $\tan r \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer de la même manière que pour $r \in \mathbb{Q}^*$, e^r est irrationnel en utilisant

$$f_n(x) = \frac{(rx - x^2)^n}{n!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^r f_n(x) e^x dx$$

Annexe : Intégrale des fonctions réglées.

Fonctions réglées. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *régulée* si et seulement si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Caractérisation des fonctions réglées. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est réglée si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en tout point.

Intégrale de Riemann des fonctions réglées. La définition de l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier s'étend aux fonctions réglées de manière unique de la manière suivante : Si (f_n) est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$, alors la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n$ converge vers un nombre, indépendant de la suite (f_n) , que l'on note $\int_a^b f(x) dx$.

Exercice 8.1.6. Théorème de prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense. Construction de l'intégrale de Riemann. [(D: 1, 2, 5, 7, éventuellement 8)] [Po], p.48-49.

1. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, F étant complet, A une partie dense de E et $f : A \rightarrow F$ uniformément continue. Montrez qu'il existe une unique application continue $\tilde{f} : E \rightarrow F$ qui prolonge f et que de plus $\tilde{f}$ est uniformément continue.
2. Montrez qu'on peut définir l'intégrale entre a et b des fonctions réglées. Montrez que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est réglée, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. *Indication.* Remarquer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $f \geq 0$, la suite $(g_n)_n = (\max(f_n, 0))_n$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f .
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrez que f est réglée.
Montrez que toute fonction continue par morceaux est réglée.
3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réglées de $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Montrez que f est réglée et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Exercice 8.2.1. Deuxième formule de la moyenne [Go], p. 122 et 127. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive décroissante de classe C^1 et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt.$$

Cette formule est appelée *deuxième formule de la moyenne*.

Indication. Si on pose $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ et si on écrit que $G([a, b]) = [m, M]$, il suffit de montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt \in [mf(a), Mf(a)]$. Pour cela, intégrer par parties et encadrer l'intégrale $\int_a^b f'(t)G(t)dt$ en utilisant le fait que $f' \leq 0$.

Prouver le même résultat si f est seulement continue en utilisant les sommes de Riemann. On pourra pour cela s'inspirer de la preuve dans le cas où f est C^1 et utiliser le fait que l'équivalent d'une intégration par parties pour une somme est la transformation d'Abel.

Exercice 8. 2.2. Inégalité de Young. [FGN2], p. 10.

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$, $f' > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrez que, pour $a \geq 0$,

$$af(a) = \int_0^a f(t)dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)dt,$$

(dériver par rapport à a) puis que, pour $b \geq 0$,

$$ab \leq \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt.$$

(étudier la fonction $b \mapsto \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - ab$). (Inégalité de Young). Interprétation géométrique ?

2. Etablir que l'égalité de la question précédente reste valable si on suppose seulement f continue, strictement croissante avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On pourra pour cela utiliser des sommes de Riemann, en prenant une subdivision régulière $(x_k)_{k=0, \dots, n}$ de l'intervalle $[0, a]$ et faire une transformation d'Abel en utilisant le fait que le pas de la subdivision $(f(x_k))_{k=0, \dots, n}$ de $[0, f(a)]$ tend vers 0.
3. Qu'obtient-on avec la fonction $f(t) = t^{p-1}$ pour $p > 1$?

Exercice 8.2.3. Suites équiréparties, Critère de Weyl. ([FGN2], p. 48. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de $[0, 1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose

$$X_n(a, b) = \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\}, u_k \in [a, b]\}.$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) $\frac{X_n(a, b)}{n}$ tend vers $b - a$ pour tout couple (a, b) ;
- (ii) pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt;$$

- (iii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} = 0.$$

On dit alors que la suite (u_n) est *équirépartie*. *Indications.* Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), utiliser l'implication est vraie pour les fonctions en escalier et le fait que toute fonction continue est limite uniforme de fonctions en escalier.

Pour (ii) $\Rightarrow$ (i), utiliser le fait que l'indicatrice d'un intervalle est limite dans $L^1[0, 1]$ d'une suite de fonctions continues.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est claire. Pour (iii) $\Rightarrow$ (ii), utiliser le théorème de Stone-Weierstraß. Montrez que la suite $(n\alpha - E(n\alpha))_{n \geq 1}$ est équirépartie si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Distribution du premier chiffre des puissances de 2. [FGN1] p. 26. Pour $i \in \{1, \dots, 9\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $N_i(n)$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\{2, 2^2, \dots, 2^n\}$ dont le premier chiffre de l'écriture décimale est i . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_i(n)}{n} = \frac{\ln(i+1) - \ln i}{\ln 10}.$$

8.3.1 Calcul de

$$\int_0^1 \text{Arc tan } \sqrt{1-x^2} dx$$

(faire une intégration par parties et un changement de variable).

8.3.2 Calcul de

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(faire un changement de variable).

Annexe. Fonctions Riemann-Intégrables.

Bernhard Riemann (1826-1866) crée en 1854 une autre théorie de l'intégrale. Cherchant à étudier la possibilité de développer une fonction continue périodique en série trigonométrique, Riemann est amené à calculer des intégrales de fonctions non continues. Il dit qu'une fonction bornée est intégrable si ce qu'on appelle maintenant les *sommes de Riemann* qui lui sont attachées ont une limite quand le pas de la subdivision tend vers 0, cette limite étant alors l'intégrale de la fonction. Il montre que les fonctions monotones sont intégrables, et donne un exemple de fonction intégrable ayant une infinité de points de discontinuité.

Cette notion d'intégrale a encore été généralisée par Lebesgue (1875-1941) en 1901. Les idées de Riemann ont, quant à elles, été généralisées par Kurzweil et Henstock à la fin des années 1950. Cette théorie, qui englobe à la fois la théorie de Lebesgue et de Riemann, tout en étant plus générale que ces deux théories, a de plus le bon goût d'être à peine moins élémentaire que la théorie de Riemann. Il est seulement dommage qu'elle ne fasse pas partie (pour l'instant...) des programmes de l'enseignement supérieur...

Définition d'une fonction Riemann-intégrable. Une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est *Riemann-intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t) - \varphi(t)| \leq \mu(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x) dx < \varepsilon.$$

Théorème et définition. Construction de l'intégrale des fonctions Riemann-intégrables. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable. En donnant à ε les valeurs d'une suite (ε_n) positive et tendant vers 0 dans la définition, on voit qu'il existe deux suites (φ_n) et (μ_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f - \varphi_n| \leq \mu_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \mu_n(x) dx = 0.$$

La suite $\left(\int_a^b \varphi_n(x) dx \right)$ est alors une suite de Cauchy, donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix des fonctions en escaliers φ_n et μ_n . On la note $\int_a^b f(x) dx$.

Théorème. Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable si et seulement si f est bornée, continue sauf sur un ensemble négligeable.

Remarque : Inutile de connaître la définition de la mesure de Lebesgue pour définir un ensemble négligeable ! Un ensemble $A \subset [a, b]$ est négligeable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε et dont la réunion contient A .

Théorème de convergence uniforme des suites de fonctions intégrables. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors, f est Riemann-intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Sommes de Riemann. Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à f relativement à cette subdivision toute somme

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Théorème. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable si et seulement si les sommes de Riemann associées à f convergent quand le pas de la subdivision tend vers 0 (en particulier, elles convergent vers l'intégrale de f sur $[a, b]$).

Remarque. En particulier, pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Riemann-intégrable, la suite

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right)$$

converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

Exercice 8.2.4. Quelques exemples.

1. Est-ce que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est réglée ?
2. **Un exemple de fonction réglée ayant un ensemble de points de discontinuité dénombrable : la fonction de Weierstrass (par exemple, [Po] p. 83 et [Go] p.108).** On définit la fonction f sur $[0, 1]$ par $f(p/q) = 1/q$ si $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et si la fraction p/q est irréductible et par $f(x) = 0$ sinon. Montrez que f est discontinue sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et continue sur $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Montrez que f est réglée. *Indication.* Montrez que si une suite de fractions rationnelles $(p_n/q_n)_n$ converge vers un irrationnel, alors $(q_n)_n$ tend vers $+\infty$ et que la fonction f admet 0 pour limite à gauche et à droite en tout point.
3. Est-ce que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est réglée ? est-ce qu'elle est Riemann-intégrable ?
4. **Un exemple de fonction non réglée, Riemann-intégrable, [Go], p. 121.** Montrez que la fonction $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0, 1]$ et qui vaut 0 en 0 est Riemann-intégrable, mais n'est pas réglée.
5. Est-ce que la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $]0, 1]$ et telle que $f(0) = 0$ est Riemann-intégrable ?

Exercice 8.4.1. ([Go], p.174). Montrez que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ converge. En

considérant l'application $F(x) : [0, 1[\ni x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, en montrant qu'elle admet une limite en 1 et en calculant la valeur de cette limite, calculez la valeur de I (on pourra utiliser le fait que $\ln t = (t - 1) + \mathcal{O}((t - 1)^2)$ au voisinage de 1).

Exercice 8.4.2 On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \int_{t=x}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Convergence et calcul de

$$\int_0^{\infty} F(x) dx.$$

Exercice 8.4.3 Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^n).$$

Quel est l'ensemble de définition de f ? de continuité ? que vaut $\lim_{1-} f$? Trouver un équivalent en $1-$ de f .

Exercice 8.4.4 Pour $m \in \mathbb{R}_+^*$, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-mt}}{t} dt.$$

Exercice 8.4.5. Convergence et calcul de

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x} dx.$$

Exercice 8.4.6 On pose $u_n(t) = \frac{2t}{t^2 + n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Convergence de $\sum u_n$?

Que vaut

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)?$$

Exercice 8.4.7. Limite et équivalent quand $x \rightarrow +\infty$ de

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(x+p)^2}$$

Exercice 8.6.1. Autour de Fatou. ([QZ], p.8) Soit $(f_n)_n$ et f des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ telles que la suite (f_n) converge simplement presque partout vers $f(x)$ et $\|f_n\|_1$ tend vers $\|f\|_1$. Montrer que $\|f_n - f\|_1$ tend vers 0. On pourra appliquer le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives

$$g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|.$$

Exercice 8.6.2. Pour $n \geq 1$, soient

$$I_n = \int_0^\pi \frac{(\sin x)^n}{\sqrt{x}} dx, \quad J_n = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}(t+n)} dt$$

et

$$K_n = \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx.$$

Déterminer la limite de I_n , J_n et K_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 8.6.3. Calculer

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-t^2} dt$$

pour $n \geq 0$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos xt \, dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8.6.4. Montrer que, pour $a > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

Exercice 8.6.5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On suppose que f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, T]$.

Montrer que la série $\sum \frac{f(nx)}{n^2}$ converge pour presque tout $x \in [0, T]$.

En déduire que $\frac{f(nx)}{n^2}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ pour presque tout $x \in [0, T]$.

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|\cos nx|} = 1$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.6.6. Pour $a > 0$, soit

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx.$$

Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$ et que $F'(a) = -\frac{1}{\sqrt{a}} F(a)$. En déduire la valeur de $F(a)$.

Exercice 8.6.7

Calculer la limite et donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$

Exercice 8.6.8

Calculer

$$\int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x} \right) dx$$

pour $a, b > 1$.**Exercice 8.6.9** Convergence et calcul de

$$\int_0^\infty \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 dx.$$

On pourra introduire

$$\int_0^\infty \frac{\arctan tx}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Exercice 8.6.10. Convergence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

Exercice 8.6.11. Soient $0 < a < b$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos xt \, dt.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$, $f(0)$ puis $f(x)$.**Exercice 8.6.12.** Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\infty} f = 1$.

On pose

$$\phi(x) = \int_0^\infty f(t) \left(\frac{\sin xt}{t} \right)^2 dt$$

Quel est le domaine de définition de ϕ ? Montrez que $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\phi(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$.**Exercice 8.6.13.** On pose

$$\phi(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt.$$

Etudier la définition de ϕ et la dérivabilité de ϕ . Calculer ϕ' .On pose $\psi(x) = \phi(x) + \phi(1/x)$. Calculer ψ .

Calculer

$$\int_0^1 \frac{(1-t) \ln t}{(1+t)(t^2 + 2t \operatorname{ch} \theta + 1)} dt.$$

Exercice 8.6.14. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} (1+t^n)^{\frac{1}{n}} dt.$$

On pourra poser $u = 1 + t^n$.

Exercice 8.6.15. Montrez que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \int_0^\pi \ln(1 + x \cos t) dt = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2} \right)$$

Exercice 8.6.16. On pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-tx}}{t} \sin t \, dt.$$

Etudier la limite de f en $+\infty$. En déduire

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 8.6.17. Soit f continue sur $[0, 1]$. Etudier la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$f(x) = n \int_0^1 f(t) \ln(1 + t^n) dt.$$

Exercice 8.7.1. En calculant de deux façons

$$\iint_{[0, +\infty[\times [0, +\infty[} \frac{dx \, dy}{(1 + y)(1 + x^2 y)},$$

montrez, après avoir établi la convergence de l'intégrale, que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1 - t^2} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 8.7.2. Montrez que

$$\int_{[0, 1]^2} \frac{dx \, dy}{1 - xy} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En faisant le changement de variables $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 8.7.3. Calcul de l'intégrale de Dirichlet.

a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n dx \int_0^\infty e^{-xt} \sin x \, dt.$$

b. En déduire le calcul de

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Exercice 8.7.4. [Av], p.333. Soient $0 < a < b$. Du calcul de

$$\int \int_{[0,1] \times [a,b]} x^y dx dy$$

déduire une formule.

Exercice 8.7.5 Convergence et calcul de

$$I(t) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{xt} \left(\int_{y=|x|}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) dx$$

9. Sujets d'étude.

Compléments sur la fonction Γ ([Go], p.290 et p.260). [(D: 7, 29, 35, 39, 41, 45, 46, 47) Extraire les points à traiter en fonction de la leçon à illustrer.]

1. *Dérivée logarithmique de Γ .* Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire, après avoir vérifié la convergence de l'intégrale, que

$$\int_0^\infty (\ln t) e^{-t} dt = -\gamma.$$

2. Montrez que, pour $x > 0$,

$$(\ln \Gamma)''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

3. *Première formule de Binet.* [AAR]

a. *Formule de Dirichlet.* On se propose de montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \frac{1}{z} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+z)^x} \right) dz.$$

Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{e^z - e^{-sz}}{z} dz = \ln s. \quad (*)$$

En considérant l'intégrale double

$$\int_{z=0}^\infty \int_{s=0}^\infty s^{x-1} \frac{e^{-s-z} - e^{-s(1+z)}}{z} ds dz,$$

qui vaut d'une part $\Gamma'(x)$ et d'autre part $\Gamma(x) \int_0^\infty \frac{1}{z} \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x} \right) dz$, déduire le résultat.

b. *Formule de Gauss.* Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz - \int_\delta^\infty \frac{dz}{z(1+z)^x} \right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz - \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \frac{e^{-tx} dt}{1 - e^{-t}} \right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\int_\delta^{\ln(1+\delta)} \frac{e^{-z}}{z} dz + \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) dt \right) \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}} \right) dz. \end{aligned}$$

c. Montrer en utilisant la formule précédente et (*) que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{2x} + \ln x - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-tx} dt.$$

En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln x - x + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt,$$

puis que pour tout $x > 0$,

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-tx}}{t} dt - I$$

où

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

En utilisant la formule de Stirling, montrez que $I = 1 - \frac{1}{2} \ln(2\pi)$. En déduire la *première formule de Binet*, c'est-à-dire que pour tout $x > 0$:

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-tx}}{t} dt.$$

Comportement à l'infini d'une fonction intégrable. [L] On se propose de montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = 0$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On note $E = \{x \in \mathbb{R}, |f(x)| \geq \varepsilon\}$. Pour un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$, on note $|A|$ la mesure de Lebesgue de A .

1. Montrez que $|E| < +\infty$.
2. On se propose de montrer que, pour presque tout $x \in [0, 1]$, nous avons $nx \in E$ pour seulement un nombre fini d'entiers $n \geq 1$. Posons, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $E_m = E \cap]m-1, m]$. Soit $a \in]0, 1[$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n = \left(\frac{1}{n}E\right) \cap [a, 1].$$

Montrez que

$$F_n = \frac{1}{n} \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} (E_m \cap [na, n[).$$

Montrez que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |F_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n} |E_m \cap [na, n[| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} |E_m \cap [na, n[| \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |E_m| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} \leq (1 - \ln a) \sum_{m=1}^{\infty} |E_m| = (1 - \ln a) |E| \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme de Borel-Cantelli (c'est-à-dire que

$$\int \sum \chi_{F_n}(x) dx = \sum \int \chi_{F_n}(x) dx < +\infty,$$

donc $\sum \chi_{F_n} < +\infty$ presque partout), en déduire que presque tout $x \in [a, 1]$ appartient à un nombre fini de F_n .

Montrer que, pour presque tout $x \in [0, 1]$, pour n assez grand, $nx \notin E$.

3. En utilisant une famille dénombrable d' ε , montrez que, pour presque tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = 0$. Par un changement de variable linéaire, montrez que ce résultat s'étend à presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Formule sommatoire de Poisson. ([Wi] p. 132, [QZ], p.93, [CFM] p.98, [Go] p.269) ([D: 35, 39, 40, 41, 46, 47]) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

On suppose que, si $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt$,

$$\max(|f(x)|, |\hat{f}(x)|) = \mathcal{O}(1/x^\alpha) \quad \text{quand } |x| \rightarrow +\infty$$

où $\alpha > 1$. On se propose de montrer que, sous ces conditions, nous avons la formule suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi n).$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $F(x)$ continue et 1-périodique.
2. Calculez le développement en série de Fourier de F . Conclure.
3. Applications ([QZ], p.116). Soit $a > 0$. Montrez que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$

(appliquer la formule de Poisson à $f(x) = e^{-a|x|}$).

([Go], p.269) Montrer que

$$\forall s > 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 / s}.$$

(appliquer la formule de Poisson à la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$).

On note, pour $x \in]-1, 1[$, $\Theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{n^2}$. Cette série entière est appelée la fonction thêta de Jacobi. Donner un équivalent lorsque $x \rightarrow 1$ de $\Theta(x)$.

Prolongement holomorphe de la fonction ζ de Riemann. ([QZ] p.28, [Go] p.278) ([D: 7, 30, 35, 39, 41, 45, 47]) On admet ici l'identité fonctionnelle (corollaire de la formule sommatoire de Poisson)

$$\forall t > 0, \quad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{où } \theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$, on note

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette fonction est appelée *Fonction zêta de Riemann*.

1. Montrez que, si $s \in \mathbb{C}$ est tel que $\operatorname{Re} s > 1$, alors $\zeta(s)$ est bien défini. Montrez que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy.$$

2. On considère pour $t > 0$, la fonction

$$\tilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

Montrez que :

$$\forall t > 0, \quad \tilde{\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \tilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}.$$

Montrez que

$$\int_0^1 \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_1^{\infty} \tilde{\theta}(u) u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

En déduire que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) + \psi(s)$$

où ψ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3. En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.
4. Déduire de la question 2 que

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \quad \zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s).$$

5. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1$ implique

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

En déduire que ζ n'a pas de zéro sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 1\}$. Déduire de la question précédente que tous les zéros de la fonction ζ sont de deux types : les entiers $-2, -4, -6, \dots$ et les autres zéros qui sont dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1\}$.

6. Montrer que, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \quad \text{quand } s \rightarrow 1.$$

Montrez que

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

Lien entre γ et ζ . ([AF], p.651) ([D: 23, 30, 35, 39, 41, 43, 47])

1. Montrez que $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$.
2. Exprimer $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ sous forme d'une série pour $n \geq 2$. Montrez que, en utilisant par exemple l'identité $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

3. Montrer que

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right) = \ln 2 - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right).$$

En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\gamma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

Méthode de Laplace. ([Ro], p.339) ([D: 35, 39, 47]) Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non, avec $a < b \leq \infty$), $\varphi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b[$ pour un certain réel t_0 . On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$.

On recherche un équivalent pour $t \rightarrow +\infty$ de l'intégrale

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx.$$

1. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x$, montrer que

$$F(t) \sim \frac{f(0)}{t}.$$

On pourra couper en $\int_0^\alpha$ et $\int_\alpha^b$, et étudier la première intégrale par convergence dominée.

2. Si $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$, montrer que

$$F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}.$$

On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y$ et utiliser la question 1.

3. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$, montrer que

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{f(0)}{\sqrt{t}}$$

Même indication qu'en 1.

4. Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, montrer que

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$

On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y^2$ et utiliser 3.

5. Application. Donner un équivalent pour $t \rightarrow +\infty$ de $\Gamma(t+1)$.
-

Intégration des relations de comparaison. Comparaison séries-intégrales. ([VP], p.16, [Go], p.212) ([D: 23, 24, 30, 35, 39, 41, 47]).

1. Soit $f : [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 . Si $\frac{f'}{f} \sim \frac{a}{x}$ ($a + 1$ et $a \neq 0$) ou si

$\frac{f'}{f} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ (cas $a = 0$) alors :

a. Si $a > -1$, $\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$ diverge et $\int_{x_0}^x f(t)dt \sim \frac{xf(x)}{a+1}$.

b. Si $a < -1$, $\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$ converge et $\int_x^{\infty} f(t)dt \sim \frac{xf(x)}{a+1}$.

c. Application : $\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$.

2. Soit $f : [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 telle que f' ne s'annule pas, $h = \frac{f}{f'}$ est dérivable et $h' = o(1)$ au voisinage de l'infini. Alors :

a. Si $f' > 0$, $\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$ diverge et $\int_{x_0}^x f(t)dt \sim \frac{f^2}{f'}$.

b. Si $f' < 0$, $\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$ converge et $\int_x^{\infty} f(t)dt \sim \frac{f^2}{|f'|}$.

c. Application : $\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

3. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 . Si $\frac{f'}{f} \sim a$ ($a \neq 0$) alors :

a. Si $\int_1^{\infty} f(t)dt$ diverge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge et

$$\sum_{k=1}^n f(k) \sim \frac{a}{1 - e^{-a}} \int_1^n f(t)dt.$$

b. Si $\int_1^{\infty} f(t)dt$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge et son reste

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \sim \frac{a}{1 - e^{-a}} \int_n^{\infty} f(t)dt.$$

c. Application : $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème de Lévy, Queffélec-Zuily, p. 526. On se propose de montrer que, si (X_n) une suite de v.a.r. , on a équivalence entre

- 1) X_n converge en loi vers X .
 2) φ_{X_n} converge vers φ_X simplement.
 1. Montrer que 1) $\Rightarrow$ 2). *Indication.* La convergence en loi implique que

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_{X_n} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f dP_X$$

pour toute fonction f continue bornée à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2. Montrons la réciproque, 2) $\Rightarrow$ 1). Considérons d'abord le cas où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En utilisant le fait que f est la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrez que

$$E(f(X_n)) \longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_X(t) dt = E(f(X)),$$

Montrez que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

En déduire le théorème de Lévy.

Application. Le théorème central limite page 529 est une très belle application des formules de Taylor...

Etude des fonctions holomorphes. Formule de Cauchy. D'après [Go], p.252. [D: 1, 15, 35, 39, 45, 47, 53].

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose f de classe C^1 et on suppose que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

On note aussi

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f'(z).$$

1. Montrer que, si $z \in U$ et si $r > 0$ est tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$, alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Indication. Il suffit de prouver que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

Considérer la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + rte^{i\theta}) d\theta$$

pour $t \in [0, 1]$, vérifier que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et que

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z + rte^{i\theta}) r e^{i\theta} d\theta.$$

Enfin, calculer la dérivée de la fonction $\theta \mapsto f(z + rte^{i\theta})$.

2. On suppose maintenant U convexe. Soit γ un chemin dans U de classe C^1 par morceaux tel que

$$\text{Ind}_\gamma(z) = 1.$$

Montrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Prolongement holomorphe de $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ pour $\alpha > 0$. ([QZ], p.57) [(D: 7, 35, 39, 41, 43, 45, 47)] Soit $\alpha > 0$. On se propose de montrer que la série entière $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ de rayon de convergence égal à 1 se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$.

1. Montrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-nt} dt$.
2. Montrez que, pour tout z dans $\mathbb{C}$ de module strictement plus petit que 1,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\alpha} = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} e^{-t}}{1 - ze^{-t}} dt.$$

3. Conclure.

Noyau de Bergman. ([Roos], p.232). [(D: 1, 5, 13, 34, 35, 39, 41, 43, 45, 46, 47)] On note Δ le disque unité de $\mathbb{C}$ et λ la mesure de Lebesgue sur Δ divisée par π (ce qui nous donne $\lambda(\Delta) = 1$.) Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace de Bergman

$$H^p(\Delta) = L^p(\Delta) \cap \mathcal{H}(\Delta)$$

muni de la norme

$$\|g\|_p = \left(\int_\Delta |g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrez que si $g \in \mathcal{H}(\varepsilon\Delta)$ alors $g(0) = \frac{4}{\varepsilon^2} \int_{\frac{\varepsilon}{2}\Delta} g d\lambda$.
2. Soit K un compact de Δ et soit $\delta = d(K, \partial\Delta) > 0$. Montrer l'existence d'une constante C_p ne dépendant que de p et indépendante de K telle que pour toute fonction $f \in H^p(\Delta)$,

$$\sup_K |f| \leq \frac{C_p}{\delta^2} \|f\|_p.$$

En déduire que H^p est un espace de Banach.

3. On suppose maintenant que $p = 2$. Montrez que :

$$\forall f \in \mathbb{H}^2(\Delta), \quad \forall z \in \Delta, \quad |f(z)| \leq \frac{4}{(1 - |z|)^2} \|f\|_2.$$

Déduire du théorème de représentation de Riesz que, pour tout $z \in \Delta$, il existe un unique $K_z \in H^2(\Delta)$ tel que

$$\forall f \in H^2(\Delta), \quad f(z) = \int_{\Delta} f \overline{K_z} d\lambda.$$

4. On pose, pour $z, w \in \Delta$, $K(z, w) = \overline{K_z(w)}$. Soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $H^2(\Delta)$. Montrez que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(z)} \varphi_k(w)$$

converge uniformément sur tout compact de Δ vers $K(z, w)$.

5. Montrez qu'une fonction $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $H^2(\Delta)$ si et seulement si son développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vérifie

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} < +\infty.$$

En déduire que la famille $\varphi_n(z) = \sqrt{n+1} z^n$ forme une base hilbertienne de $H^2(\Delta)$ et que

$$K(z, w) = \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^2}.$$

Remarque. Le noyau de Bergman possède aussi une expression explicite si on ne se place plus dans Δ mais dans un domaine simplement connexe pour lequel on connaît une application conforme dans Δ . Voir [Roos]

Bibliographie.

- [AAR] Andrews G., Askey R. and Roy R., Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its applications 71, Cambridge University Press.
- [ADT] Acx O, Desnoux P.-J., Tissier A., Cours complet et 636 exercices corrigés de Mathématiques, Première période, Prépa MPSI/PCSI, Vuibert, deuxième édition.
- [Av] Avez A., la leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation, Masson, deuxième édition.
- [AF] Arnaudière J.M. et Fraisse H., Cours de mathématiques - 2, Dunod.
- [BBR] Bonnault N., Burnol J.-F., Roche Ph., Analyse, Math Sup et Math Spé, Exercices corrigés posés à l'oral des concours, J'intègre, Dunod.
- [Br] Brézis H., Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 3ème tirage.
- [Ca] G. Casanova, Les séries Mathématiques, Que sais-je ?
- [CM] Chamaraux A. et Monchamp M., Méthodes ou recettes, Ellipses.
- [CFM] Chambert-Loir A., Fermigier S. et Maillot V., Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, Masson.
- [Di] Dieudonné J., Calcul infinitésimal, Hermann, deuxième édition.
- [FGN1] Francinou S., Gianella H. et Nicolas S., Exercices de mathématiques, oraux X-ENS, Algèbre 1, Cassini
- [FGN2] Francinou S., Gianella H. et Nicolas S., Exercices de mathématiques, oraux X-ENS, Analyse 2, Cassini
- [FJ] J. Franchini et J.-C. Jacquens, Analyse 1, Mathématiques Spéciales, Ellipses.
- [Go] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses.
- [Go2] X. Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre*, Ellipses.
- [Gr] A. Gramain, *Intégration*, Hermann
- [HW] E. Hairer et G. Wanner, L'analyse au fil de l'histoire, Springer.
- [L] E. Lesigne, On the behavior at Infinity of an integrable function, American Math Monthly 117, February 2010.
- [MZ] L. Markov et L. Zhou, Recurrent proofs of the irrationality of Certain Trigonometric Values, American Math Monthly **117**, (2010), no 4, p. 360–362.
- [Ni] I. Niven, a simple proof that π is irrational, Bulletin of the American Mathematical Society, **53**, (1947), p. 509
- [Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques, Cours d'Analyse*, Ellipses, 1994.

- [QZ] H. Queffelec, C. Zuily, Agrégation de Mathématiques, éléments d'Analyse, Dunod.
- [Roos] G. Roos, Analyse et géométrie, Dunod.
- [Ro] F. Rouvière, petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, Cassini.
- [Ra] E. Ramis, *Exercices d'Analyse*, Masson.
- [Ru] Rudin W., Analyse réelle et complexe, Masson, sixième tirage.
- [V-P] J. Vauthier, J.-J. Prat, *Cours d'Analyse Mathématique de l'agrégation*, Masson, 2ème édition, 1994.
- [Wi] M. Willem, Analyse harmonique réelle, Hermann.