

6 Convergence

Lycée Jean Moulin, Saint-Amand-Montrond

Corrigé
p. 14

15 min.

Étudier la convergence de la suite (u_n) dans les cas suivants :

- 1 pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{2n+3}{n+100}$
- 2 pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$
- 3 pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right)(n+3)$
- 4 pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{(-1)^n + 3n}{(-1)^n + 2n}$
- 5 pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{(-1)^n + \frac{n}{2}}{(-1)^n + \frac{2}{n}}$

12 Suite convergente

Corrigé
p. 39

30 min.

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Soit $0 < k < 1$ et la suite u , définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = (1 + k^n) u_n.$$

- 1 Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geq 1$,

$$u_n = (1 + k) \left(1 + k^2\right) \left(1 + k^3\right) \dots \left(1 + k^{n-1}\right).$$

- 2 Soit $v_n = \ln u_n$.

(a) Justifier que, pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

(b) En déduire que la suite v est majorée par $\frac{k}{1-k}$.

- 3 Démontrer que la suite u est majorée.

Étudier le sens de variation de u .

En déduire que la suite u est convergente.

Corrigé
p. 18

30 min.

11 Encadrement de la constante d'Euler

Lycée La Tour, Paris

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = S_n - \ln n$ ou

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- 1 On admet dans cette question que, pour tout réel $x > -1$, on a :
 $x \geq \ln(1+x)$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

- 3 Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq v_0$. En déduire que la suite (u_n) converge, puis que la suite (v_n) converge vers la même limite.

La limite commune de ces deux suites est appelée la constante d'Euler.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

- 2 On pose à présent, pour tout $n \geq 1$,

Quel est le sens de variation de (v_n) ?

5 Étude d'une fonction irrationnelle

Corrigé
p. 90



25 min.

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

La fonction f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{pour } x = 1 \end{cases}$$

- 1 f est-elle continue en 1 ?
- 2 f est-elle dérivable en 1 ?
- 3 Justifier que f est dérivable pour x différent de 1.
- 4 Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 1$. (On ne demande pas le signe de $f'(x)$).
- 5 Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

6 Calcul de dérivées

Corrigé
p. 92



30 min.

Lycée Jules Ferry, Caen

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ puis calculer leurs dérivées.

- $f(x) = \frac{3x^3 - 6x + 5}{x^2 + 1}$
- $g(x) = (5x^4 - 2x^2 + x)^3$
- $h(x) = \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1} \right)^4$
- $l(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x^2}}$

8 Limites en un nombre réel

Corrigé
p. 64



20 min.

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Étudier les limites suivantes. Lorsqu'une limite prouve l'existence d'une asymptote à la courbe représentative, donner son équation.

- 1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x - 2}$
- 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- 4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2x}{x^2 + 2x - 3}$.

9 Limites de quotients

Corrigé
p. 65



10 min.

Lycée Jacques Prévert, Boulogne

Calculer les limites suivantes :

- 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x}$.
- 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1}$.

10 Lever une indétermination

Lycée Corot, Savigny-sur-Orge

- 1 Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$. Étudier la limite de h en $+\infty$.
- 2 Soit g la fonction définie sur $]-\infty, -1]$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + x}$. Étudier la limite de g en $-\infty$.

Corrigé
p. 66

15 min.