Rappels sur la Théorie des distributions.

1. Définition, propriétés élémentaires et exemples

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'évaluation de cette fonction en un point a un sens théorique mais n'a que peu de sens en pratique. Si par exemple Ω est la pièce dans laquelle vous vous trouvez et f est la fonction qui à un point de cette pièce associe la température en ce point, la valeur précise de cette valeur n'est physiquement pas mesurable. Si vous placez un thermomètre en ce point, vous obtiendrez la température du thermomètre en question (qui occupe matériellement plus de place qu'un simple point...), qui correspond à la valeur moyenne des points qui constituent ce thermomètre. En pratique, vous n'obtiendrez donc pas $f(x)$ mais plutôt $\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\varphi(u)du$ où $\varphi(u)$ sera une fonction dont le support sera très proche du point x (le support de φ correspond à l'espace physiquement occupé par le thermomètre dans notre exemple) qui correspond à la valeur moyenne de f prise dans le support de φ avec la densité φ. En particulier, plus le thermomètre sera précis, plus le support de φ sera proche du point x et plus l'intégrale de φ sera proche de 1. L'idéal est bien sûr d'avoir supp $\varphi = \{x\}$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)du = 1$ ce qui n'est pas possible puisque l'intégrale d'une fonction nulle presque partout vaut 0. L'idée donc est de ne pas considérer les valeurs de la fonction $f(x)$ mais plutôt de considérer les valeurs de l'application qui à une fonction φ continue à support compact associe $\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\varphi(u)du$. Si on note T cette application, on remarque qu'on a alors

$$\forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^n, \quad \exists C > 0, \quad \forall \varphi\ C^\infty \text{ dans } \mathbb{R}^n \text{ à support inclus dans } K \qquad |T(\varphi)| \leq C \sup_K |\varphi|.$$

Cette remarque est le point de départ de la définition des distributions.

1.1. Notation. Si Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un sous-ensemble de Ω, on notera $K \subset\subset \Omega$ si K est relativement compact dans Ω *i.e.* $\overline{K}$ est un compact inclus dans Ω.
Si Ω est un sous-ensemble ouvert de Ω, on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telles que supp $\varphi \subset\subset \Omega$.
Si $K \subset\subset \Omega$, on note $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que supp $\varphi \subset K$.
On note $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ les multi-indices. On pose $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et pour $\varphi \in C^k(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\forall x \in \Omega, \qquad \partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$$

si $|\alpha| \leq k$.

1.2. Définition. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que T est une *distribution sur* Ω si et seulement si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\forall K \subset\subset \Omega, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \exists C > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

$T(\varphi)$ sera souvent noté $\langle T, \varphi \rangle$. On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

Cette souplesse au niveau de la définition des distributions qui en fait finalement des objets plus naturels d'un point de vue physique que les fonctions apportera plus de propriétés aux distributions qu'aux fonctions. En particulier, on verra que toute distribution est indéfiniment dérivable dans un sens que l'on précisera, et que si une suite de distributions converge vers une distribution, alors la suite des dérivées converge vers les dérivées de la limite. Ces propriétés qui sont bien entendues fausses pour les fonctions confèrent aux distributions une grande souplesse d'utilisation dans les applications pratiques. Par contre, on verra qu'il n'est pas possible en général de multiplier entre elles des distributions.

Nous allons introduire une notion de convergence pour une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui nous sera utile par la suite.

1.3. Définition. Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand $j \to +\infty$ si et seulement si il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, supp $\varphi_j \subset K$ et tel que φ_j ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 uniformément dans K. Enfin, on dira que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si $(\varphi_j - \varphi)_j$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Nous avons le résultat suivant :

1.4. Proposition. *Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle T, \varphi_j\rangle \longrightarrow_{j\to+\infty} 0$.*

Preuve. Montrons que si T est une distribution et si (φ_j) est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers 0, la suite $\langle T, \varphi_j\rangle$ tend vers 0. Si la suite (φ_j) tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe K tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, supp $\varphi_j \subset K$ et tel que φ_j ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 uniformément dans K. Si T est une distribution alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$|\langle T, \varphi_j\rangle| \leq C \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|\leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j| \longrightarrow_{j\to+\infty} 0.$$

Montrons maintenant que si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\langle T, \varphi_j\rangle \to 0$ pour toute suite φ_j de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers 0, alors T est une distribution. Supposons que T ne soit pas une distribution. Il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $C > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tel que

$$|\langle T, \varphi\rangle| > C \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|\leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

En particulier, si on pose pour $j \in \mathbb{N}^*$, $N = C = j$ et si on pose

$$\varphi_j = \frac{\varphi}{C \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|\leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|}$$

où la fonction φ est la fonction précédemment définie, on a $|\langle T, \varphi_j\rangle| > 1$ et (φ_j) tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (toutes les fonctions φ_j ont leur support inclus dans K et toutes les dérivées partielles sont majorées sur K par $1/C = 1/j$ qui tend vers 0). C'est absurde. □

Donnons quelques exemples de distributions.

1.5. Distribution de Dirac. Si $a \in \Omega$, on définit la distribution δ_a de Dirac en a par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a).$$

On vérifie (Exercice 1.1) que c'est bien une distribution sur Ω.

1.6. Distribution associée à une fonction. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable (*i.e.* intégrable sur tout compact de Ω). On définit la distribution T_f par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi.$$

On vérifie (Exercice 1.2) que c'est une distribution et que l'application $f \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est injective. Par abus de notation, on identifiera T_f et f.

1.7. Distribution valeur principale de $1/x$. La fonction $1/x$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la distribution "valeur principale de $1/x$" et on note $vp(\frac{1}{x})$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

On vérifie (Exercice 1.3) que cette limite existe et définit bien une distribution.

Exercice 1.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Montrez qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$.*

2. Ordre d'une distribution.

2.1. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T une distribution sur Ω. On dit que T est d'ordre inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ si et seulement si

$$\forall K \subset\subset \Omega, \quad \exists C > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$$

(en d'autres termes, le N dans la définition des distributions est indépendant de K).
On dira que T est d'ordre N si T est d'ordre inférieur ou égal à N mais n'est pas d'ordre inférieur ou égal à $N-1$.

2.2. Exemples. - Les distributions d'ordre 0 sont les mesures de Radon (Exercice 1.5.).
- La valeur principale de $1/x$ est d'ordre égal à 1. (Exercice 1.6. On pourra considérer des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui valent 1 sur $[\frac{1}{j}, 1]$, telles que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2j}, 2]$).

3. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3.1. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, T une distributions sur Ω et $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que T_j converge vers T quand $j \to +\infty$ au sens des distributions si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_j, \varphi \rangle \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle.$$

Exercice 1.7. *Montrez que la suite $\cos jx$ de distributions sur $\mathbb{R}$ tend vers 0.*

Enfin, nous avons le théorème suivant :

3.2. Théorème. *Si T_j est une suite de distributions sur Ω telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi \rangle \text{ existe,}$$

alors la forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi \rangle$$

est une distribution sur Ω.

Preuve. La linéarité de T est évidente. Montrons la continuité de T.
Soit $(\varphi_j)_j$ une suite qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand $j \to +\infty$. Il nous faut démontrer que $\langle T, \varphi_j \rangle$ converge vers 0 quand $j \to +\infty$.

Procédons par l'absurde. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |\langle T, \varphi_k \rangle| \geq 2a.$$

Comme

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \langle T, \varphi_k \rangle = \lim_{j \to +\infty} \langle T_j, \varphi_k \rangle,$$

on en déduit pour tout k l'existence d'un j_k tel que

$$|\langle T_{j_k}, \varphi_k \rangle| \geq a > 0.$$

Or ce résultat est impossible par suite du lemme suivant. Le théorème est prouvé. □

Lemme. *Si (T_k) est une suite de distributions telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \exists C_\varphi > 0, \qquad \sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| \leq C_\varphi$$

alors pour toute suite (φ_k) qui tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle T_k, \varphi_k \rangle \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve du lemme. Supposons que le lemme soit faux. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $c > 0$ tel que $|\langle T_k, \varphi_k \rangle| \geq c$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
La convergence de $(\varphi_k)_k$ vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ signifie qu'il existe un compact K de Ω tel que le support de φ_k soit inclus dans K pour tout k, et que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \qquad \sup_K |\partial^\alpha \varphi_k| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Quitte à considérer une autre sous-suite, on peut supposer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \qquad |\alpha| \leq k \implies \sup_K |\partial^\alpha \varphi_k| \leq \frac{1}{4^k}.$$

Posons $\psi_k = 2^k \varphi_k$. Nous avons encore

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{supp} \psi_k \subset K \quad \text{et} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \qquad |\alpha| \leq k \implies \sup_K |\partial^\alpha \psi_k| \leq \frac{1}{2^k}. \tag{a}$$

Et donc

$$|\langle T_k, \psi_k \rangle| = 2^k |\langle T_k, \varphi_k \rangle| \geq 2^k c \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{b}$$

On forme maintenant les suites (T_{k_ν}) et (ψ_{k_ν}) : on choisit T_{k_1} et ψ_{k_1} de façon à avoir $|\langle T_{k_1}, \psi_{k_1} \rangle| \geq 2$.
Supposons T_{k_j} et ψ_{k_j} pour $j = 1, \ldots, \nu - 1$ construits.
Puisque $\psi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand $k \to +\infty$, on a $\langle T_{k_j}, \psi_k \rangle \to 0$ quand $k \to +\infty$ et $j = 1, \ldots, \nu - 1$.
Grâce à (a), il existe un rang N tel que

$$\forall j = 1, \ldots, \nu - 1, \qquad \forall k \geq N, \qquad \left| \langle T_{k_j}, \psi_k \rangle \right| \leq \frac{1}{2^{\nu - j}}. \tag{c}$$

Notons, pour $j = 1, \ldots, \nu - 1$, $c_j = \sup_k |\langle T_k, \psi_{k_j} \rangle|$.
Grâce à (b), il existe un $k_\nu \geq \max(k_1, \ldots, k_{\nu-1}) + 1 + N$ tel que

$$|\langle T_{k_\nu}, \psi_{k_\nu} \rangle| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} c_j + \nu + 1. \tag{d}$$

Les distributions T_{k_ν} et les fonctions ψ_{k_ν} ainsi construites possèdent en vertu de (c) et (d) les propriétés suivantes :

$$\forall j = 1, \ldots, \nu - 1, \qquad \left| \langle T_{k_j}, \psi_{k_\nu} \rangle \right| \leq \frac{1}{2^{\nu - j}} \tag{e}$$

$$|\langle T_{k_\nu}, \psi_{k_\nu} \rangle| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} |\langle T_{k_\nu}, \psi_{k_j} \rangle| + \nu + 1. \tag{f}$$

Posons $\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{k_j}$. Il découle de (a) que cette série converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ donc $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et

$$\langle T_{k_\nu}, \psi \rangle = \langle T_{k_\nu}, \psi_{k_\nu} \rangle + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{\infty} \langle T_{k_\nu}, \psi_{k_j} \rangle.$$

Compte tenu des inégalités (e) et (f),

$$|\langle T_{k_\nu}, \psi \rangle| \geq |\langle T_{k_\nu}, \psi_{k_\nu} \rangle| - \sum_{j=1}^{\nu-1} |\langle T_{k_\nu}, \psi_{k_j} \rangle| - \sum_{j=\nu+1}^{+\infty} |\langle T_{k_\nu}, \psi_{k_j} \rangle| \geq \nu + 1 - \sum_{j=\nu+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = \nu.$$

Ceci prouve que $|\langle T_{k_\nu}, \psi \rangle| \to +\infty$ quand $\nu \to +\infty$, et ceci contredit le fait que la suite $(\langle T_k, \psi \rangle)_k$ est bornée. Le lemme est donc prouvé. □

4. Multiplication des distributions par des fonctions C^∞.

Soit f une fonction localement intégrable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et g une fonction C^∞ sur Ω. On sait définir la fonction gf par $(gf)(x) = g(x)f(x)$. Cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega (gf)\varphi = \int_\Omega f(g\varphi).$$

Cette propriété est à la base de la définition suivante.

4.1. Théorème et définition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞. Soit T une distribution sur Ω. On définit la distribution notée gT par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle.$$

On vérifie (Exercice 1.8) qu'on a bien défini ainsi une distribution.

Exercice 1.9. *Montrez que $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.*

Exercice 1.10. *Montrez que l'espace des solutions de l'équation $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est le sous-espace $\{c\delta_0,\ c \in \mathbb{C}\}$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On pourra si $\varphi, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\theta(0) = 1$ montrer que $\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)$ est de la forme $x\psi(x)$ où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Exercice 1.11. *On se propose de montrer qu'il n'existe pas de produit sur l'espace des distributions qui soit associatif et tel que le produit d'une distribution T et d'une distribution T_φ associée à une fonction φ C^∞ à support compact coïncide avec le produit $T\varphi$ définit précédemment de cette distribution T par cette fonction φ. Prenons $\Omega = \mathbb{R}$. Posons $R = \delta_0$, $S = x$ et $T = vp(\frac{1}{x})$. En calculant $R(ST)$ et $(RS)T$, conclure.*

5. Dérivation des distributions.

Soit f une fonction C^∞ sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On sait définir la dérivée de f. Cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int f'\varphi = -\int f\varphi'.$$

Cette propriété s'obtient par intégration par parties.
Si maintenant f est une fonction C^∞ sur un ouvert Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on sait, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ définir la dérivée d'ordre α de f. Cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int f(\partial^\alpha \varphi).$$

(Exercice 1.12. Vérifier cette affirmation.) Cette propriété est à la base de la définition suivante.

5.1. Théorème et définition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T une distribution sur Ω. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la distribution dérivée d'ordre α de T notée $\partial^\alpha T$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

On vérifie (Exercice 1.13) qu'on a bien défini ainsi une distribution.

Exercice 1.14. *Montrez que* $\ln |x|$ *définit une distribution sur* $\mathbb{R}$ *et calculez la dérivée de cette distribution.*

5.2. Proposition. *L'application* $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *est linéaire continue.*

Preuve. Exercice 1.15.

5.3. Théorème. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction différentiable dans Ω telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Alors*

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_j} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}.$$

Exercice 1.16. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Montrez qu'il suffit de prouver que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$-\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx = \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \varphi(x) dx.$$

2. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
a. *Montrez que si le support de φ est inclus dans un parallélépipède $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\subset \Omega$, l'égalité précédente est vraie.*
b. *Montrez qu'il existe un nombre fini de parallélépipèdes dont la réunion contienne le support de φ.*
c. *Conclure.*

5.4. La formule des sauts. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\}$ une fonction de classe C^1 telle que les limites de f en a à droite et à gauche existent. Alors*

$$T'_f = T_{f'} + (f(a^+) - f(a^-))\delta_a.$$

Preuve. Exercice 1.17. □

Nous introduisons maintenant la notion de solution fondamentale d'un opérateur aux dérivées partielles linéaire et à coefficients constants.

5.4. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $D : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ un opérateur aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants de la forme

$$D = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \partial^\alpha$$

où I est une partie finie de $\mathbb{N}^n$ et les a_α sont des nombres complexes. On dit que la distribution T est une (il n'y a pas unicité en général) *solution fondamentale* de D si et seulement si $DT = \delta_0$.

Exercice 1.18. *On identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Pour $z = x + iy$, on pose $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Montrez que la fonction $\frac{1}{\pi z}$ définit une distribution solution fondamentale de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. On pourra utiliser la suite de distributions $T_n = \frac{1}{\pi} \frac{\bar{z}}{|z|^2 + \frac{1}{n^2}}$.*

6. Restriction et Support d'une distribution.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ se prolonge par 0 en dehors de Ω_1 pour définir un élément de $\mathcal{D}(\Omega_2)$. Cette injection de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_2)$ est continue (dans le sens que si une suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega_1)$, elle tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega_2)$) . Elle permet donc de définir un opérateur de restriction de $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ qui à toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ associe l'élément de $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ donné par

$$\langle T_{|\Omega_1}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

6.1. Théorème de recollement. *Soit $(\Omega_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $j \in J$, soit $T_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$. On suppose que la famille $(T_j)_j$ satisfait la condition de compatibilté suivante :*

$$T_{j|\Omega_j \cap \Omega_k} = T_{k|\Omega_j \cap \Omega_k}, \qquad \textit{pour tous } j, k \in J.$$

Alors il existe une unique distribution T sur $\Omega = \bigcup_{j\in J} \Omega_j$ telle que la restriction de T à chaque Ω_j soit T_j.

Preuve. Soit K un compact de Ω. Il existe une partie finie $I \subset J$ telle que $K \subset_{j\in I} \Omega_i$. Il existe donc une suite finie $(\varphi_j)_j \in I$ telle $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ et telle que $0 \le \varphi_j \le 1$ et $\sum_{j\in I} \varphi_j = 1$ au voisinage de K. Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on pose

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{j\in I} \langle T_j, \varphi\varphi_j \rangle.$$

Observons d'abord que T ne dépend pas du choix de la suite (φ_j). En effet, si I' est une partie finie de J telle que $K \subset \bigcup_{j\in I'} \Omega_k$ et si $\psi_k \in \mathcal{D}(\Omega_k)$ pour $k \in I'$ est une suite finie telle que $0 \le \psi_k \le 1$ et $\sum_{k\in I'} \psi_k = 1$ au voisinage de K, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} \langle T_j, \varphi\varphi_j \rangle &= \sum_{j\in I} \langle T_j, \sum_{k\in I'} \varphi\varphi_j\psi_k \rangle \\
&= \sum_{j\in I} \sum_{k\in I'} \langle T_j, \varphi\varphi_j\psi_k \rangle \\
&= \sum_{k\in I'} \sum_{j\in I} \langle T_k, \varphi\varphi_j\psi_k \rangle \\
&= \sum_{k\in I'} \langle T_k, \sum_{j\in I} \varphi\varphi_j\psi_k \rangle = \sum_{k\in I'} \langle T_k, \varphi\psi_k \rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part, on voit que $T : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{D}_K(\Omega)$ est continue. Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il est clair que la restriction de T à chaque Ω_j est précisément T_j. Finalement, l'unicité de T découle de sa définition. □

6.2. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle *ouvert d'annulation de* T tout ouvert U de Ω tel que la restriction de T à U est nulle.

6.3. Proposition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors il existe un plus grand ouvert d'annulation de T.*

Preuve. Soit O_T la réunion de tous les ouverts d'annulation de T. Montrons que O_T est aussi un ouvert d'annulation. Soit K un compact de O_T. Alors il existe un nombre fini $U_1, \dots, U_N$ d'ouverts d'annulation tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$. On prend une partition de l'unité $\varphi_j \in \mathcal{D}(U_j)$ telle que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^N \varphi_j = 1$ au voisinage de K. Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ alors $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^N \langle T, \varphi\varphi_j\rangle$, ce qui montre que T s'annule sur O_T. $\square$

6.4. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle *support de* T et on note supp T le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert d'annulation de T.

Exercice 1.19.

1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \Omega$. Montrez que supp $\delta_a = \{a\}$.*

2. *Montrez que supp $vp[\frac{1}{x}] = \mathbb{R}$.*

6.5. Définition. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.

Nous avons le théorème suivant :

6.6. Théorème. *Toute distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini. Plus précisément, si N est l'ordre de T, pour tout voisinage compact K de supp T, il existe une constante C telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Preuve. Soit L le support de T. On prend une fonction θ à support compact dans Ω qui vaut 1 au voisinage de L. On en déduit que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $\varphi - \theta\varphi$ est nulle au voisinage de $L = \text{supp } T$ donc $\varphi - \theta\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \backslash \text{supp } T)$ et donc $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \theta\varphi\rangle$. Soit K un compact de Ω. Soit M le support de θ qui est donc un compact de Ω. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, alors

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \theta\varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{M} |\partial^\alpha(\theta\varphi)|$$

Or, si $|\alpha| \leq N$, grâce à la formule de Leibniz,

$$\sup_M |\partial^\alpha(\theta\varphi)| = \sup_{K\cap M} |\partial^\alpha(\theta\varphi)| \leq C' \left(\sup_M \sup_{\beta\leq\alpha} |\partial^\beta\theta|\right) \left(\sup_K \sup_{\beta\leq\alpha} |\partial^\beta\varphi|\right)$$

et donc

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C'' \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{K} |\partial^\alpha(\theta\varphi)|$$

où C'' et N sont donc indépendantes de K. $\square$

6.7. Extension de la dualité. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et si θ est une fonction dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\theta \equiv 1$ dans un voisinage de supp T, alors pour tout $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\langle T, \varphi\theta\rangle$ est indépendant de l'application θ choisie (Exercice 1.20 : le vérifier). On prolongera donc l'action de T sur $C^\infty(\Omega)$ par la formule précédente. Ceci explique la notation $\mathcal{E}'(\Omega)$ employée pour désigner l'ensemble des distributions à support compact : $\mathcal{E}(\Omega)$ est en effet une notation communément employée pour désigner l'espace $C^\infty(\Omega)$.

7. Convolution des distributions.

Dans le reste de ce chapitre, nous écrirons $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, nous noterons $\tau_x f$ et $\check{f}$ les fonctions définies par

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x), \qquad \check{f}(y) = f(-y).$$

Si f et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(x+u)du$$

si ces intégrales existent et leur convolution est définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

pourvu que cette intégrale converge. Il devient alors naturel de définir la convolution d'une distribution avec une fonction de $\mathcal{D}$ de la manière suivante :

7.1. Définition. Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. On note $\tau_x T$ la distribution définie par $\langle \tau_x T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-x}\varphi \rangle$. On définit la convolée de T et φ comme étant la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe $\langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle$. On la note $T * \varphi$.

Nous avons le théorème suivant :

7.2. Théorème. *Si $T \in \mathcal{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, alors*

i. $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

ii. $T * \varphi$ *est* C^∞ *et, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi).$$

iii. $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$.

Preuve.

i. Si $y \in \mathbb{R}^n$, $(T * \varphi)(y) = \langle T, \tau_y \check{\varphi} \rangle$. Donc $[\tau_x(T * \varphi)](y) = \langle T, \tau_{y-x}\check{\varphi} \rangle$. Or, si $z \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{y-x}\check{\varphi}(z) = \varphi(y-x-z)$ et $[\tau_y((\tau_x\varphi)\check{})](z) = \varphi(y-x-z)$ donc $\langle T, \tau_{y-x}\check{\varphi} \rangle = \langle T, \tau_y((\tau_x\varphi)\check{}) \rangle = (T * (\tau_x \varphi))(y)$ et donc $\tau_x(T * \varphi) = T * (\tau_x\varphi)$.
Si $y \in \mathbb{R}^n$, $((\tau_x T) * \varphi)(y) = \langle \tau_x(T), \tau_y \check{\varphi} \rangle = \langle T, \tau_{-x}[(\tau_y \check{\varphi})] \rangle$ avec $\tau_{-x}[(\tau_y\check{\varphi})](z) = \varphi(y-z-x)$ et donc $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi$.

ii. Montrons d'abord que, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors

$$(\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$$

On a $(\partial^\alpha T) * \varphi(x) = \langle (\partial^\alpha T), \tau_x \check{\varphi} \rangle = (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha(\tau_x \check{\varphi}) \rangle = \langle T, \tau_x[(\partial^\alpha \varphi)\check{}] \rangle = T * (\partial^\alpha \varphi)(x)$
Si $h = (h_1, 0, \dots, 0)$ avec $h_1 \neq 0$ alors

$$\frac{T * \varphi(x+h) - T * \varphi(x)}{h_1} = \frac{\tau_{-h} T * \varphi - T * \varphi}{h_1}(x) = \left[\frac{\tau_{-h}T - T}{h_1} * \varphi\right](x) = \left[T * \frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h_1}\right](x).$$

Pour conclure que $T * \varphi$ est dérivable et que $\partial_1(T * \varphi) = T * (\partial_1 \varphi)$, il suffit de montrer que la famille de fonctions $\frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h_1}$ tend vers $\partial_1 \varphi$ pour la topologie de $\mathcal{D}$. Le résultat général pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ quelconque s'obtiendra alors par récurrence sur $|\alpha|$.
Il suffit donc de montrer que, pour toute suite h_j de réels qui tend vers 0, la suite $\varphi_j = \frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\dots,0)}\varphi - \varphi)$ tend vers $\partial_1 \varphi$. Remarquons tout d'abord que supp φ_j est inclus dans (supp φ) $\cup$ (supp $\varphi + h_j$) et donc qu'il existe un compact K tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, supp φ_j est inclus dans K car (h_j) tend vers 0. Il reste à montrer que les dérivées d'ordre β pour $\beta \in \mathbb{N}^n$ de $\varphi_j - \varphi$ tendent vers 0 uniformément sur K quand j tend vers $+\infty$ pour conclure.
On remarque que, pour $(x_1, \dots, x_n) \in K$,

$$\partial^\beta \left(\frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\dots,0)}\varphi - \varphi) - \partial_1 \varphi\right)(x_1, \dots, x_n)$$
$$= \frac{\partial^\beta \varphi(x_1 - h_j, x_2, \dots, x_n) - \partial^\beta \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_j} - \partial_1 \partial^\beta \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

donc

$$\left|\partial^\beta \left(\frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\dots,0)}\varphi - \varphi) - \partial_1 \varphi\right)(x_1, \dots, x_n)\right|$$
$$\leq \left|\frac{\partial^\beta \varphi(x_1 - h_j, x_2, \dots, x_n) - \partial^\beta \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_j} - \partial_1 \partial^\beta \varphi(x_1, \dots, x_n)\right| \leq |h_j| \sup_K |\partial_1^2 \partial^\beta \varphi|$$

d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, et donc

$$\sup_{x\in K}\left|\partial^\beta\left(\frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\ldots,0)}\varphi-\varphi)-\partial_1\varphi\right)(x_1,\ldots,x_n)\right|\le |h_j|\sup_K|\partial_1^2\partial^\beta\varphi|$$

tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$ ce qui termine la preuve.

iii. Si $x\in\mathbb{R}^n$, on a

$$(T*(\varphi*\psi))(x)=\langle T,\tau_x[(\varphi*\psi)\check{}]\rangle=\langle T,z\mapsto(\varphi*\psi)(-z+x)\rangle=\langle T,z\mapsto\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy\rangle.$$

Le support de l'application $z\mapsto\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy\rangle$ est $x-(\text{ supp }\varphi+\text{ supp }\psi\ )=K_x$ et l'intégrale précédente est en fait une intégrale portant sur les $y\in(x-K_x-\operatorname{supp}\varphi)\cap\operatorname{supp}\psi$. Notons L_x le compact $(x-K_x-\operatorname{supp}\varphi)\cap\operatorname{supp}\psi$ et soit A_x un nombre réel positif tel que $L_x\subset[-A_x,A_x]^n$. En écrivant cette intégrale comme une limite de sommes de Riemann, on peut écrire

$$\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy=\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^N\lambda_{j,N}\varphi(x-z-y_{j,N})\psi(y_{j,N})$$

où les $\lambda_{j,N}>0$ et $y_{j,N}\in L_x$. Plus précisément, si F est une fonction C^1 sur $[a,b]$ et M_2 un majorant de la dérivée seconde de F, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne

$$|F(b)-F(a)-(b-a)F'(a)|\le M_2\frac{(b-a)}{2}^2.$$

En particulier si f est continue sur $[a,b]$, la fonction $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ vérifie cette inégalité et donc

$$\left|\int_a^b f(t)dt-(b-a)f(a)\right|\le M_1\frac{(b-a)}{2}^2$$

où M_1 est un majorant de f'. Si on décompose $[a,b]$ en les N intervalles $[a+\frac{b-a}{N}k,a+\frac{b-a}{N}(k+1)]$ pour $k=0,\ldots,N-1$, si on applique l'inégalité sur chacuns de ces intervalles et si on somme ces inégalités, on obtient

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f\left(a+\frac{b-a}{N}k\right)\right|\le M_1\frac{(b-a)}{2N}^2$$

(c'est la méthode des rectangles). En particulier, pour $z\in K_x$, on a

$$\left|\int_{[-A_x,A_x]^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy-\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1}\frac{2A_x}{N}\varphi(x-z+a-k\frac{2A_x}{N})\psi(-a+k\frac{2A_x}{N})\right|$$
$$\le\frac{2n}{N}A_x^2\sup_{L_x}\max_{i=1,\ldots n}\left|\frac{\partial}{\partial y_i}(\varphi(x-z-y)\psi(y))\right|.$$

En appliquant cette inégalité aux fonctions $z\mapsto\int_{[-A_x,A_x]^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy$ et ainsi qu'aux dérivées $z\mapsto\int_{[-A_x,A_x]^n}\partial^\beta\varphi(x-z-y)\psi(y)dy$, on en déduit que la suite de fonctions à supports dans K_x

$$z\mapsto\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1}\frac{2A_x}{N}\varphi(x-z+a-k\frac{2A_x}{N})\psi(-a+k\frac{2A_x}{N})$$

converge uniformément ainsi que ses dérivées sur le compact K_x vers la fonction

$$z\mapsto\int_{[-A_x,A_x]^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy.$$

On en déduit que

$$\langle T,z\mapsto\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy\rangle=$$
$$=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1}\frac{2A_x}{N}\langle T,z\mapsto\varphi(x-z+a-k\frac{2A_x}{N})\rangle\psi(-a+k\frac{2A_x}{N})$$
$$=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1}\frac{2A_x}{N}T*\varphi(x+a-k\frac{2A_x}{N})\rangle\psi(-a+k\frac{2A_x}{N})$$

La fonction $T*\varphi$ est C^∞, donc continue et donc la dernière limite est une somme de Riemann qui converge donc vers
$$\int_{y\in\mathbb{R}^n}(T*\varphi)(x-y)\psi(y)dy=\int_{y\in\mathbb{R}^n}\langle T,z\mapsto\varphi(x-z-y)\rangle\psi(y)dy.$$
Autrement dit, on a montré qu'on peut permuter l'action de la distribution T avec l'intégration par rapport à y, c'est-à-dire qu'on a
$$\left\langle T,z\mapsto\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy\right\rangle=\int_{y\in\mathbb{R}^n}\langle T,z\mapsto\varphi(x-z-y)\rangle\psi(y)dy.$$
On a alors
$$\int_{y\in\mathbb{R}^n}\psi(y)\langle T,z\mapsto\varphi(x-z-y)\rangle dy=\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\psi(x-y')\langle T,z\mapsto\varphi(y'-z)\rangle dy$$
où on a posé $y'=x-y$, et cette dernière intégrale vaut
$$\int_{y'\in\mathbb{R}^n}\psi(x-y')(T*\varphi)(y')=[(T*\varphi)*\psi](x).$$
□

7.3. Définition. Si $T\in\mathcal{E}'$ alors T peut alors agir sur $\mathcal{E}$. On peut donc en particulier définir $T*\varphi$ pour $\varphi\in\mathcal{E}$ par la formule $T*\varphi=\langle T,\tau_x\check{\varphi}\rangle$.

Nous avons alors le théorème suivant :

7.4. Théorème. *Si $T\in\mathcal{E}'$, $\varphi\in\mathcal{E}$ et $\psi\in\mathcal{D}$, alors*

i. $\tau_x(T*\varphi)=(\tau_xT)*\varphi=T*(\tau_x\varphi)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}^n$.

ii. $T*\varphi$ *est* C^∞ *et, pour tout* $\alpha\in\mathbb{N}^n$,
$$\partial^\alpha(T*\varphi)=(\partial^\alpha T)*\varphi=T*(\partial^\alpha\varphi).$$

iii. $T*(\varphi*\psi)=(T*\varphi)*\psi=(T*\psi)*\varphi$.

iv. $T*\psi\in\mathcal{D}$.

Preuve. Les points i, ii et iii se prouvent de manière analogue. Il reste le point iv, c'est-à-dire qu'il reste à montrer que $T*\psi$ est à support compact. Plus précisément, nous allons montrer que supp $T*\psi\subset$ supp $T+$ supp ψ. Pour cela, soit $x\notin$ (supp $T+$ supp ψ). Or supp $\tau_x\check{\psi}=x-$ supp ψ. Et ($x-$ supp ψ) $\cap$ supp $T=\emptyset$ puisqu'on a supposé que $x\notin$ (supp $T+$ supp ψ). Et donc $T*\psi(x)=0$, ce qui prouve bien que supp $T*\psi\subset$ supp $T+$ supp ψ. □

Nous pouvons maintenant définir la convolée de deux distributions dont une est à support compact.

7.5. Théorème et définition. *Si S et T sont deux distributions dont l'une au moins est à support compact, alors il existe une unique distribution que l'on notera $S*T$ qui vérifie, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}$, $(S*T)*\varphi=S*(T*\varphi)$.*

Preuve. Si T est à support compact alors $T*\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et donc $S*(T*\varphi)$ a bien un sens. Si S est à support compact, alors $T*\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$ et donc $S*(T*\varphi)$ a bien un sens. Il existe alors une unique distribution U telle que $U*\varphi=S*(T*\varphi)$. Pour voir l'unicité il suffit de remarquer qu'on a nécessairement $\langle U,\varphi\rangle=(U*\check{\varphi})(0)=[S*(T*\check{\varphi})](0)$. Montrons que U ainsi définie est bien une distribution. Si φ_j est une suite de fonctions qui tend vers 0, alors il existe un compact K qui contient tous les supports des φ_j et tel que, sur K, toutes les dérivées des φ_j tendent uniformément vers 0. On en déduit que toutes les dérivées de $(T*\check{\varphi}_j)$ tendent uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ et donc que $[S*(T*\check{\varphi}_j)](0)=\langle U,\varphi_j\rangle$ tend vers 0 donc que U est bien une distribution. On a alors
$$\begin{aligned}(U*\varphi)(x)=\langle U,\tau_x\check{\varphi}\rangle=[U*(\tau_x\check{\varphi})\check{}\,](0)&=[S*(T*(\tau_x\check{\varphi})\check{}\,)](0)\\&=[S*(T*(\tau_{-x}\varphi))](0)=[S*\tau_{-x}(T*\varphi)](0)=\tau_{-x}[S*(T*\varphi)](0)=[S*(T*\varphi)](x),\end{aligned}$$
d'où le résultat. □

Enfin, nous avons le théorème suivant :

7.6. Théorème. *Soient $R, S, T \in \mathcal{D}'$.*

i. *Si au moins une des distributions S et T est à support compact, alors $S * T = T * S$.*
ii. *Si au moins une des distributions S et T est à support compact alors supp $(S * T) \subset$ supp $S+$ supp T.*
iii. *Si au moins deux des distributions R, S et T sont à support compact, alors $(R * S) * T = R * (S * T)$.*
iv. *Pour toute distribution T, $\delta_0 * T = T$.*
v. *Si au moins une des distributions S et T est à support compact et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\partial^\alpha(R*S) = (\partial^\alpha R)*S = R*(\partial^\alpha S)$.*

Preuve.

i. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, puisque la convolution de fonctions est commutative, le point *iii* du théorème 7.2 implique que

$$(S * T)(\varphi * \psi) = S * (T * (\varphi * \psi)) = S * ((T * \varphi) * \psi) = S * (\psi * (T * \varphi).$$

Si supp T est compact, appliquons une fois encore *iii* du théorème 7.2 tandis que si supp S est compact, on applique le point *iii* du théorème 7.4. Dans les deux cas, nous avons

$$(S * T)(\varphi * \psi) = (S * \psi) * (T * \varphi).$$

Puisque $\varphi * \psi = \psi * \varphi$, le même calcul donne

$$(T * S) * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * (S * \psi).$$

On a donc

$$(S * T)(\varphi * \psi) = (T * S) * (\varphi * \psi).$$

Pour conclure que $S * T = T * S$, il reste à montrer que si U est une distribution telle que $U * \varphi * \psi = 0$ pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, alors $U = 0$. Pour cela on remarque que si $\varphi \in \mathcal{D}$ et si θ est une fonction de $\mathcal{D}$ à support dans un voisinage de 0 et dont l'intégrale vaut 1, alors $\theta_j(x) = j^n\theta(jx)$ est une suite de $\mathcal{D}$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\varphi * \theta_j)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) j^n \theta(jy) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - u/j)\theta(u) du \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \theta(u) du = \varphi(x).$$

donc, comme $U * (\varphi * \theta_j) = 0$, on a $U * \varphi = 0$ puis $U = 0$ puisque $\langle U, \varphi\rangle = (U * \check{\varphi})(0)$.

ii. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, un calcul simple nous donne

$$\langle S * T, \varphi\rangle = \langle S, (T * \check{\varphi})\check{}\rangle.$$

D'après *i*, nous pouvons supposer que supp T est compact. La démonstration du point *iv* du théorème 7.4. montre que le support de $T * \check{\varphi}$ est contenu dans supp $T -$ supp φ. En particulier $\langle S * T, \varphi\rangle = 0$ à moins que supp S ne coupe supp $\varphi -$ supp T, c'est-à-dire à moins que supp φ ne coupe supp $S +$ supp T.

iii. Nous concluons d'après *ii* que

$$(R * S) * T \qquad \text{et} \qquad R * (S * T)$$

sont définies si au plus un des ensembles supp R, supp S et supp T n'est pas compact. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$(R * (S * T)) * \varphi = R * ((S * T) * \varphi) = R * (S * (T * \varphi))$$

Si supp T est compact, alors

$$((R * S) * T) * \varphi = (R * S)(T * \varphi) = R * (S * (T * \varphi))$$

car $T * \varphi \in \mathcal{D}$ d'après *iv* du théorème 7.4. On obtient donc le résultat dès que supp T est compact. Si supp T n'est pas compact, alors supp R est compact et le cas précédent combiné avec la propriété de commutativité *i* nous donne

$$R * (S * T) = R * (T * S) = (T * S) * R = T * (S * R) = T * (R * S) = (R * S) * T.$$

iv. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $\delta_0 * \varphi = \varphi$ car

$$(\delta_0 * \varphi)(x) = \langle\delta_0, \tau_x\check{\varphi}\rangle = (\tau_x\check{\varphi})(0) = \varphi(x).$$

Donc les parties *iii* ci-dessus et *ii* du théorème 7.2 nous donnent

$$(\partial^\alpha R) * \varphi = R * (\partial^\alpha \varphi) = R * (\partial^\alpha(\delta_0 * \varphi)) = R * (\partial^\alpha \delta_0) * \varphi.$$

v. Cela découle de *iv*, *iii* et *i* :

$$\partial^\alpha(R * S) = (\partial^\alpha\delta_0) * (R * S) = ((\partial^\alpha\delta_0) * R) * S = (\partial^\alpha R) * S$$

et de même pour l'autre égalité. □

Enfin, nous avons le théorème suivant qui justifie l'intérêt des solutions fondamentales.

7.7. Théorème. *Si D est un opérateur linéaire à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ et E une solution fondamentale de D alors, pour toute distribution T à support compact, $T * E$ vérifie $D(T * E) = T$.*

Preuve. On a $D(T * E) = T * (DE) = T * \delta_0 = T$ □

Solutions des exercices.

Exercice 1.1. Si $K \subset\subset \Omega$, on a deux cas. Premier cas : $a \in K$ alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|\langle \delta_a, \varphi\rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup_K |\varphi|$. Deuxième cas : $a \notin K$ alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $\varphi(a) = 0$ et donc $|\langle \delta_a, \varphi\rangle| = 0 \leq \sup_K |\varphi|$.

Exercice 1.2. Si K est un compact et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ alors

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leq \left(\sup_K |\varphi|\right) \int_K |f|,$$

ce qui prouve bien que T est une distribution.

Exercice 1.3. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, $A > 0$ tel que $K \subset] - A, A[$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Intégrons par parties ; nous obtenons :

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon - \varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_{-A}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\ln|x|dx - \int_{\varepsilon}^{A} \varphi'(x)\ln|x|dx$$

car $\varphi(A) = \varphi(-A) = 0$. La fonction $\mathbb{R}_*^+ \ni x \mapsto \ln|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\int_{\varepsilon}^{1} |\ln x|dx = \varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon + 1 \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 1.$$

Il en découle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\ln|x|dx + \int_{\varepsilon}^{A} \varphi'(x)\ln|x|dx\right)$$

existe et vaut

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\ln|x|dx.$$

Comme φ est C^1, on a $\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon) = -2\varepsilon\varphi'(0)+o(\varepsilon)$ au voisinage de 0 donc $(\varphi(-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon))\ln\varepsilon \sim -2\varepsilon\varphi'(0)\ln\varepsilon \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \to 0$. En particulier on a bien l'existence de

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle$$

et

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \qquad |\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle| = \left|-\int_K \varphi'(x)\ln|x|dx\right| \leq \sup_K |\varphi'| \int_K |\ln|x||dx.$$

ce qui prouve que $vp(\frac{1}{x})$ est bien une distibution.

Exercice 1.4. Supposons qu'il existe une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Soit θ une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\theta(0) = 1$. Posons $\varphi_N(x) = \theta(N(x-a))$. On a supp $\varphi_N = a + \frac{1}{N}$supp θ, donc à partir d'un certain rang, supp $\varphi_N \subset \Omega$. On a alors $\langle \delta_a, \varphi_N\rangle = \varphi_N(a) = 1$ et $\langle T_f, \varphi_N\rangle = \int_\Omega f\varphi_N$. Or si K est un compact de Ω voisinage de a, il existe un rang M à partir duquel, pour tout $N \geq M$, on ait supp $\varphi_N \subset K$, ce qui implique que, pour tout $N \geq M$, $|f\varphi_N| \leq |f|\|\theta\|_\infty \mathbf{1}_K \in L^1(\Omega)$ car $f \in L^1_{loc}$. La suite de fonctions $f\varphi_N$ tend simplement vers 0 presque partout. Il découle du théorème de la convergence dominée que $\langle T_f, \varphi_N\rangle \longrightarrow_{N\to+\infty} 0$ ce qui est contradictoire.

Exercice 1.5. C'est un corollaire immédiat du théorème de représentation de Riesz.

Exercice 1.6. On a vu que si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \qquad |\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle| = \left| -\int_K \varphi'(x) \ln|x| dx\right| \le \sup_K |\varphi'| \int_K |\ln|x||dx.$$

Ceci montre que $vp(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1. Supposons que $vp(\frac{1}{x})$ ne soit pas une distribution d'ordre exactement 1, mais d'ordre 0. On en déduit que, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \qquad |\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle| \le C \sup_K |\varphi|.$$

On prend alors $K = [0, 2]$ et $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui valent 1 sur $[\frac{1}{j}, 1]$ telles que $0 \le \varphi_j \le 1$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2j}, 2]$. On a alors

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi_j\rangle \ge \int_{\frac{1}{j}}^1 \frac{dx}{x} = \ln j$$

et $\sup_K |\varphi| = 1$. Ceci contredit l'existence de la constante C précédente et prouve bien que $vp(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre exactement égal à 1.

Exercice 1.7. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Supposons supp $\varphi \subset]-A, A[$, ce qui implique en particulier que $\varphi(-A) = \varphi(A) = 0$. En intégrant par parties, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(jx)\varphi(x)dx &= \int_{-A}^{+A} \cos(jx)\varphi(x)dx \\ &= \left[\frac{1}{j}\sin(jx)\varphi(x)\right]_{-A}^{+A} - \frac{1}{j}\int_{-A}^{A} \sin(jx)\varphi'(x)dx = -\frac{1}{j}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(jx)\varphi'(x)dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(jx)\varphi(x)dx\right| \le \frac{1}{j}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'(x)|dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui prouve bien que $\cos jx$ tend vers 0 au sens des distributions.

Exercice 1.8. Soit K un compact de Ω. Soient N et C tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le C \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

Si $g \in C^\infty(\Omega)$, on a alors grâce à la formule de Leibniz, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$\partial^\alpha(g\varphi) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta g)(\partial^{\alpha-\beta}\varphi).$$

En particulier, pour $|\alpha| \le N$,

$$\sup_K |\partial^\alpha(g\varphi)| \le \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\sup_K |\partial^\beta g|\right)\left(\sup_K |\partial^{\alpha-\beta}\varphi|\right) \le \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\sup_K \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ |\gamma|\le N}} |\partial^\gamma g|\right)\left(\sup_K |\sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ |\gamma|\le N}} \partial^\gamma \varphi|\right)$$

donc

$$\sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le N}} \sup_K |\partial^\alpha(g\varphi)| \le \left(\sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le N}} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\right)\left(\sup_K \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ |\gamma|\le N}} |\partial^\gamma g|\right)\left(\sup_K |\sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ |\gamma|\le N}} \partial^\gamma \varphi|\right)$$

et

$$|\langle gT, \varphi\rangle| = |\langle T, g\varphi\rangle| \le C\left[\left(\sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le N}} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\right)\left(\sup_K \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ |\gamma|\le N}} |\partial^\gamma g|\right)\right]\left(\sup_K |\sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ |\gamma|\le N}} \partial^\gamma \varphi|\right)$$

ce qui montre bien que gT est une distribution.

Exercice 1.9. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle x\, vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x\varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi\rangle,$$

donc $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.

Exercice 1.10. On suit l'indication proposée. La fonction $f(x) = \varphi(x) - \theta(x)$ est de classe C^1 et vérifie $f(0) = 0$. Donc

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = x\int_0^1 f'(xu)du$$

grâce au changement de variable $t = xu$. Le théorème de dérivation sous le signe somme montre que

$$\psi(x) = \int_0^1 f'(xu)du$$

est de classe C^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(xu)du.$$

En effet, cela découle du fait que, si M_k est un majorant de $|f^{(k)}|$ sur $\mathbb{R}$ (qui existe car f est à support compact et qu'il en est donc de même pour les dérivées de f), alors

$$|u^k f^{(k+1)}(xu)| \leq M_{k+1}u^k$$

qui est intégrable sur $[0, 1]$. Il reste à vérifier que ψ est à support compact : si $x \in \mathbb{R}$ et si $x \notin$ supp $\varphi\cup$ supp $\theta \cup \{0\}$, alors $\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x) = x\psi(x) = 0$ car $\varphi(x) = \theta(x) = 0$, ce qui implique que $\psi(x) = 0$ car $x \neq 0$. On a donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et supp $\psi \subset$ supp $\varphi\cup$ supp $\theta \cup \{0\}$.

Nous avons donc,

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x)\rangle = \varphi(0)\langle T, \theta\rangle + \langle xT, \psi(x)\rangle = \varphi(0)\langle T, \theta\rangle$$

car $xT = 0$, et donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \theta\rangle\langle \delta_0, \varphi\rangle,$$

ce qui prouve que $T = c\delta_0$ avec $c = \langle T, \theta\rangle \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.11. Nous avons, d'après l'Exercice 1.9, $ST = 1$ donc $R(ST) = R = \delta_0$.
Nous avons maintenant $RS = 0$, donc $(RS)T = 0 \neq R(ST)$.

Exercice 1.12. La propriété énoncée est vraie si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (par récurrence sur l'entier α). Elle est donc vraie si Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$. En effet, tout ouvert de Ω de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles disjoints. Il suffit pour cela de considérer la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Ω définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert $I_{x,y}$ contenant x et y et inclus dans Ω. On vérifie aisément que c'est bien une relation d'équivalence. On remarque ensuite que les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts (en fait la classe d'équivalence de x est la composante connexe de Ω contenant x). Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que chaque classe d'équivalence contient au moins un rationnel (par densité de $\mathbb{Q}$), on en déduit que l'ensemble des classes d'équivalences est donc au plus dénombrable et donc que Ω est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.
Si maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on en déduit que supp φ est inclus dans une réunion finie d'intervalles ouverts disjoints $I_1, \ldots I_N$ (par compacité de supp φ) de Ω et donc que

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^\alpha \sum_{i=1}^N \int_{I_i} f(\partial^\alpha\varphi) = (-1)^\alpha \int_\Omega f(\partial^\alpha\varphi),$$

et donc la propriété est vraie quel que soit l'ouvert Ω de $\mathbb{R}$.

On raisonne maintenant par récurrence sur la dimension n de $\mathbb{R}^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supposons que cela soit vrai au rang $n-1$. Si maintenant Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = \int_{x_1\in\mathbb{R}} \int_{x'\in\Omega_{x_1}} (\partial_1^{\alpha_1}\partial_{x'}^{\alpha'} f)\varphi$$

où on a noté $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x')$ avec $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $\alpha' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et où $\Omega_{x_1} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ (x_1, x') \in \Omega\}$ qui est ouvert car Ω_{x_1} est l'image réciproque par l'application continue $\mathbb{R}^{n-1} \ni x' \mapsto (x_1, x') \in \mathbb{R}^n$ de Ω. On a alors

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = \int_{x_1\in\mathbb{R}} \int_{x'\in\Omega_{x_1}} \partial_{x'}^{\alpha'}(\partial_1^{\alpha_1} f)\varphi.$$

L'hypothèse de récurrence nous donne

$$\int_{x'\in\Omega_{x_1}} \partial_{x'}^{\alpha'}(\partial_1^{\alpha_1} f)\varphi = (-1)^{|\alpha'|} \int_{x'\in\Omega_{x_1}} (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi)$$

et donc

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha'|} \int_\Omega (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi).$$

Le même raisonnement mais en tranchant par rapport à x' nous donne

$$\int_\Omega (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi) = \int_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\Omega^{x'}} (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi)$$

où $\Omega^{x'}$ est l'ouvert de $\mathbb{R}$ défini par $\Omega^{x'} = \{x_1 \in \mathbb{R},\ (x_1, x') \in \Omega\}$. En particulier,

$$\int_{\Omega^{x'}} (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi) = (-1)^{\alpha_1} \int_{\Omega^{x'}} f(\partial_1^{\alpha_1}\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi)$$

donc

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(\partial^\alpha\varphi)$$

et termine l'exercice.

Exercice 1.13. Soit K un compact de Ω. Comme T est une distribution, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \qquad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|\leq N}} \sup_K |\partial^\beta\varphi|.$$

En particulier,

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \qquad |\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle| = |\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle| \leq C \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|\leq N}} \sup_K |\partial^{\beta+\alpha}\varphi| \leq C \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|\leq N+|\alpha|}} \sup_K |\partial^\beta\varphi|.$$

ce qui prouve bien que $\partial^\alpha T$ est une distribution sur Ω.

Exercice 1.14. On a vu dans l'Exercice 1.3 que $\ln|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ donc définit une distribution et que,

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = -\langle \ln|x|, \varphi'\rangle$$

et donc $(\ln|x|)' = vp(\frac{1}{x})$ au sens des distributions.

Exercice 1.15. Il suffit de montrer que si une suite de distributions T_n tend vers 0 alors, $\partial^\alpha T_n$ tend vers 0. Or T_n tend vers 0 si et seulement si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow 0$. En particulier, comme pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \partial^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \partial^\alpha\varphi\rangle \longrightarrow 0$, le résultat en découle.

Exercice 1.16.

1. Si on le montre pour la dérivation par rapport à x_1, le résultat se prouvera de manière analogue pour les dérivations par rapport aux autres x_j.

2. a. On a

$$-\int_{\Omega} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}dx = -\int_{]a_2,b_2[\times\cdots\times]a_n,b_n[}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\right)dx_2\cdots dx_n$$

Prouvons maintenant que si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ telle que $u' \in L^1_{loc}(]a,b[)$ et $v \in \mathcal{D}(]a,b[)$ alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = -\int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Cela découle du fait que si w est une fonction dérivable sur $]a,b[$ dont la dérivée est intégrable sur tout compact $[c,d] \subset]a,b[$ alors $w(d)-w(c) = \int_c^d w'(t)dt$. Attention : cette égalité n'est pas triviale car w' n'est pas continue ! Il s'agit d'un théorème dû à Lebesgue et nous renvoyons le lecteur à un ouvrage d'intégration ou par exemple à l'ouvrage de W. Rudin, “Analyse réelle et complexe”, Masson, page 161, théorème 8.21. En particulier, appliquant cela à la fonction $w = uv$ sur un intervalle $[c,d]$ tel que supp $v \subset]c,d[$ nous obtenons

$$0 = u(d)v(d) - u(c)v(c) = \int_c^d (u'v + vu')$$

donc

$$\int_a^b u'v = \int_c^d u'v = -\int_c^d uv' = -\int_a^b uv'.$$

Revenant à l'intégrale initiale, nous avons donc

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1 = -\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1.$$

d'où le résultat demandé.

b. La compacité du support de φ entraîne le résultat.

c. On prend une partition de l'unité adaptée à la famille de parallélépipèdes $P_1,\ldots,P_N$ précédente, c'est-à-dire qu'on prend des fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ telles que supp $\varphi_i \subset P_i$ et telles que $\varphi_1+\cdots+\varphi_N \equiv 1$ sur supp φ. On a alors

$$\int_{\Omega} f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx = \sum_{i=1}^N\int_{\Omega} f(x)\frac{\partial(\varphi\varphi_i)}{\partial x_1}dx = -\sum_{i=1}^N\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(\varphi\varphi_i)(x)dx = -\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx$$

d'où le résultat.

Exercice 1.17. Si $I = |\alpha,\beta|$ ($|$ signifie $]$ ou $[$ et $\alpha \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$), et si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\begin{aligned}\langle T_{f'},\varphi\rangle = \int_{\alpha}^{a^-} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{a^+}^{\beta} f'(x)\varphi(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_{\alpha}^{a^-} - \int_{\alpha}^{a^-} f(x)\varphi'(x)dx + \\ + [f(x)\varphi(x)]_{a^+}^{\beta} - \int_{a^+}^{\beta} f(x)\varphi'(x)dx = f(a^-)\varphi(a^-) - f(a^+)\varphi(a^+) - \int_I f(x)\varphi'(x)dx \\ = (f(a^-)-f(a^+))\varphi(a) - \langle T_f',\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Exercice 1.18. Pour montrer que la fonction $\frac{1}{\pi z}$ définit bien une distribution, il suffit de montrer qu'elle est localement intégrable sur $\mathbb{C}$. Comme cette fonction est continue sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, elle est donc localement intégrable sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pour conclure, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur tout voisinage compact de 0, et donc il suffit de montrer que pour tout $R > 0$, $\int_{|z|\le R}\frac{dxdy}{|z|} < +\infty$. Pour cela, on passe en coordonnées polaires :

$$\int_{|z|\le R}\frac{dxdy}{|z|} = 2\pi\int_0^R\frac{r\,dr}{r} = 2\pi R < +\infty$$

ce qui montre bien que $\frac{1}{\pi z}$ définit bien une distribution T.

Le théorème de la convergence dominée montre maintenant que T_n tend vers T. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$, la suite de fonctions $\frac{\bar{z}}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\varphi(z)$ converge simplement vers $\frac{\varphi(z)}{z}$ et est majorée en module par $\frac{|\varphi(z)|}{|z|}$ qui est intégrable car $\frac{1}{z}$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}$. Et donc

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\bar{z}}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\varphi(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z)}{z}$$

ce qui montre bien que $T_n \to T$.
La continuité des opérateurs de dérivations partielles (proposition 5.2.) montre que $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}T_n \to \frac{\partial}{\partial\bar{z}}T$. Pour calculer $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}T$, il suffit donc de calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}T_n$. La distribution T_n étant associée à une fonction C^∞, la distribution $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}T_n$ est donc la distribution associée à la fonction $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\bar{z}}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\right)$. On a

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{|z|^2+\frac{1}{n^2}} + \bar{z}\frac{(-z)}{(|z|^2+\frac{1}{n^2})^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{(|z|^2+\frac{1}{n^2})^2}$$

donc, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$, on a

$$\langle\frac{\partial T_n}{\partial\bar{z}},\varphi\rangle = \int_{\mathbb{C}}\frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{n^2}}{(|z|^2+\frac{1}{n^2})^2}\varphi(z)dm(z),$$

où $dm(z)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. Posons $z = \frac{w}{n}$ dans cette intégrale, nous obtenons

$$\langle\frac{\partial T_n}{\partial\bar{z}},\varphi\rangle = \int_{\mathbb{C}}\frac{1}{\pi}\frac{1}{(|w|^2+1)^2}\varphi(\frac{w}{n})dm(w).$$

Si M est un majorant de $|\varphi|$ alors

$$\left|\frac{1}{(|w|^2+1)^2}\varphi(\frac{w}{n})\right| \leq \frac{M}{(|w|^2+1)^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{C}$ car, en passant en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{C}}\frac{dm(w)}{(|w|^2+1)^2} = 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{r\,dr}{(r^2+1)^2} = \pi\int_0^{+\infty}\frac{du}{(u+1)^2} = \pi < +\infty.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, comme

$$\frac{1}{(|w|^2+1)^2}\varphi(\frac{w}{n})$$

tend simplement vers

$$\frac{1}{(|w|^2+1)^2}\varphi(0),$$

on en déduit que

$$\langle\frac{\partial T_n}{\partial\bar{z}},\varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{C}}\frac{1}{\pi}\frac{1}{(|w|^2+1)^2}\varphi(0)dm(w) = \varphi(0)\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{dm(w)}{(|w|^2+1)^2} = \varphi(0)$$

d'après le calcul fait précédemment. Et donc $\frac{\partial T}{\partial\bar{z}} = \delta_0$.

Exercice 1.19.

1. $\Omega\setminus\{a\}$ est un ouvert d'annulation de δ_a. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega\setminus\{a\})$, alors supp φ est un compact de $\Omega\setminus\{a\}$ et donc $\varphi(a) = 0$, ce qui implique que $\langle\delta_a,\varphi\rangle = 0$. Si maintenant $\Omega\setminus\{a\}$ n'est pas le plus grand ouvert d'annulation de δ_a, alors Ω est le plus grand ouvert d'annulation de δ_a, ce qui veut dire que $\delta_a = 0$, ce qui est absurde. On en déduit que le plus grand ouvert d'annulation de δ_a est $\Omega\setminus\{a\}$ et donc que supp $\delta_a = \{a\}$.
2. Il suffit de montrer qu'un ouvert d'annulation de $T = vp(\frac{1}{x})$ est vide. Supposons donc que Ω soit un ouvert d'annulation de T non vide. Tout d'abord, on ne peut avoir $\Omega = \{0\}$ car $\{0\}$ n'est pas ouvert. Et donc, il existe $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que $a \in \Omega$. Supposons $a > 0$ (le raisonnement sera identique si $a < 0$). Comme Ω est ouvert, soit $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset \Omega$. On peut supposer $\alpha < a$, si bien que $]a-\alpha,a+\alpha[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]a-\alpha,a+\alpha[$, positive et telle que $\varphi = 1$ sur $]a-\frac{\alpha}{2},a+\frac{\alpha}{2}[$. On a alors

$$\langle vp(\frac{1}{x}),\varphi\rangle \geq \int_{a-\frac{\alpha}{2}}^{a+\frac{\alpha}{2}}\frac{dx}{x} > 0$$

donc $\langle vp(\frac{1}{x}),\varphi\rangle \neq 0$ ce qui contredit le fait que Ω est un ouvert d'annulation de T. On a donc bien prouvé que supp $vp(\frac{1}{x}) = \mathbb{R}$.

Exercice 1.20. Si $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ et si θ_1 et θ_2 sont deux fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ valant 1 au voisinage de supp T, alors $(\theta_1-\theta_2)\varphi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash\text{supp } T)$ donc $\langle T,\theta_1\varphi\rangle = \langle T,\theta_2\varphi\rangle$.

Rappels sur la transformée de Fourier.

1. La transformée de Fourier.

C'est une transformation d'une importance capitale en Analyse et plus particulièrement en équations aux dérivées partielles. Elle permet, entre autre, de transformer des équations aux dérivées partielles en des problèmes algébriques, souvent plus faciles à résoudre. Les distributions lui fournissent un cadre très général adapté.

Heuristique. Nous essayons de généraliser la théorie des séries de Fourier aux fonctions qui ne sont pas périodiques en faisant tendre la période vers l'infini. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On va la supposer suffisamment régulière, de manière qu'elle soit égale à sa série de Fourier. Sa série de Fourier est

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi inx/T}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi int/T}dt,$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi int/T}dt\right)e^{2\pi inx/T}.$$

Notons $x_n = 2n\pi/T$, la formule précédente se réécrit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(x_n)e^{ixx_n}(x_{n+1} - x_n)$$

avec

$$\widehat{f}(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-itx}dt.$$

La somme précédente ressemble à une somme de Riemann de pas $2\pi/T$ qui tend vers 0 quand $T \to +\infty$. Faisant tendre formellement T vers $+\infty$, on "intuite" que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(u)e^{iux}du$$

avec

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixu}dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire usuel de x et de y, c'est-à-dire que $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. On note aussi dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que $dx = dx_1 \cdots dx_n$.
Enfin, si $x \in \mathbb{R}^n$ et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

1.1 Définition. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^n$ par la formule

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx.$$

$\widehat{f}$ est bien définie, $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.

1.2. Remarque. De nombreuses conventions différentes existent en ce qui concerne la définition de la transformée de Fourier. Certains auteurs remplacent i par $-i$ dans la formule, d'autres remplacent i par $2\pi i$, etc .... La convention que nous adoptons ici est la convention la plus communément adoptée, notamment par l'American Mathematical Society. Cette convention est la plus commode quand on travaille avec des équations aux dérivées partielles. Par contre, avec cette convention, la transformée de Fourier ne se prolonge pas en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si on souhaite avoir cet aspect isométrique de la transformée de Fourier, l'introduction du facteur 2π dans l'exponentielle est alors nécessaire. Ceci explique la coexistence de ces différentes conventions.

1.3. Propriétés. *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ est continue où $C_0(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ qui tendent vers 0 à l'infini muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Preuve. La continuité a été prouvée. Le fait que $\widehat{f}$ soit une fonction continue découle simplement du théorème de convergence dominée. Il reste à vérifier que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini.
On remarque que c'est vrai si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. En effet, on a alors en intégrant par parties

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \widehat{\partial^2_{x_i} f}(\xi) = -\xi_i^2 \widehat{f}(\xi),$$

et donc

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\xi\|^2 \widehat{f}(\xi) = -\widehat{\Delta f}(\xi),$$

soit encore

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad \widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{\|\xi\|^2}\widehat{\Delta f}(\xi) \underset{\|\xi\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si maintenant, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et si $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f-g\|_1 \leq \varepsilon$. Comme $\widehat{g}(\xi)$ tend vers 0 quand $\|\xi\| \to +\infty$, nous avons l'existence d'un $R > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \geq R$ implique $|\widehat{g}(\xi)| \leq \varepsilon$.
On a alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\xi\| \geq R \;\Rightarrow\; |\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{g}(\xi)| + |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| \leq \varepsilon + \|f-g\|_1 \leq 2\varepsilon. \qquad \square$$

1.4. Théorème. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.*

Preuve. C'est une application simple du théorème de Fubini : on sait que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)e^{-i\langle x,\xi\rangle} dy\, dx$$

$$= \int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx\, dy = \int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x'\in\mathbb{R}^n} f(y)g(x')e^{-i\langle x'+y,\xi\rangle} dx\, dy$$

(on a posé $x = x' + y$)

$$= \left(\int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle} dy\right)\left(\int_{x'\in\mathbb{R}^n} g(x')e^{-i\langle x',\xi\rangle} dx'\right) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \qquad \square$$

1.5. Proposition. *Si $a \in \mathbb{R}^n$ et $f_a = f(a + \cdot)$, alors*

$$\widehat{f_a} = e^{i\langle a,\cdot\rangle}\widehat{f}.$$

Preuve. Exercice 2.1 $\square$

2. Espace de Schwartz.

2.1. Définition. On appelle *espace de Schwartz* et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telles que, pour tous multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < +\infty.$$

En d'autres termes, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions C^∞ dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide. On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la distance d définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}$$

Muni de cette distance, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace métrique complet (Exercice 2.2).
De plus, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En effet, on vérifie que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\varphi(0) = 1$ alors si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $f\varphi(\cdot/p)$ qui converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quand $p \to +\infty$. (Exercice 2.3).
On montre facilement que le produit de deux fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est encore dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Exercice 2.4).
On montre tout aussi facilement que la famille de semi-normes

$$\|f\|'_{\alpha,p} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^p |\partial^\alpha f(x)|$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $p \in \mathbb{N}$ définit la même topologie de l'espace de Schwartz que celle précédemment énoncée (Exercice 2.5).

2.2. Proposition. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors :*

$$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad et \qquad \forall\alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \partial^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|}[\widehat{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}} f]$$

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \widehat{\partial^\alpha f} = i^{|\alpha|}\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}\widehat{f}$$

Preuve. Il suffit de dériver sous le signe somme pour prouver la première assertion. Pour la seconde, il suffit d'intégrer par parties ; les termes au bord disparaissent puisque f et ses dérivées s'annulent à l'infini. (Exercice 2.6 : détailler la preuve) □

2.3. Proposition. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. En effet, si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, grâce au théorème de dérivation sous le signe somme :

$$\xi^\alpha\partial^\beta\widehat{f}(\xi) = i^{|\alpha|}\int_{x\in\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha(-ix)^\beta f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx = i^{|\alpha|}\int_{x\in\mathbb{R}^n}(-ix)^\beta f(x)\partial_x^\alpha\left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right)dx.$$

En intégrant par parties, la dernière intégrale est égale à

$$(-i)^{|\alpha|}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\partial_x^\alpha\left((-ix)^\beta f(x)\right)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx.$$

La formule de Leibniz donne une majoration indépendante de ξ du module de la dernière intégrale. (Exercice 2.7 : détailler la preuve) □

2.4. Proposition. *Soit $a > 0$ et $f_a = e^{-a\|\cdot\|^2}$. Alors*

$$\widehat{f}_a = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{4a}}.$$

Preuve. Si $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{f}_a(\xi) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2 - i\langle x,\xi\rangle} dx = \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-a_j x^2 - i\xi_j x} dx\right).$$

Il suffit donc d'évaluer pour $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$I_{a,t} = \int_{x\in\mathbb{R}} e^{-ax^2 - itx} dx = e^{-\frac{t^2}{4a}} \int_{x\in\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{t}{2a}\right)^2} dx.$$

La fonction $g(z) = e^{-az^2}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui tend rapidement vers 0 quand $|\operatorname{Re} z| \to +\infty$ et $|\operatorname{Im} z|$ reste borné. En particulier, si on fixe $R > 0$ et si on intègre la fonction g sur le bord $\mathcal{R}$ du rectangle joignant $-R,\ R,\ R + it/2a,\ -R + it/2a$, on a

$$0 = \int_{\mathcal{R}} g(z)dz = \left(\int_{-R}^{R} + \int_{R}^{R+it/2a} - \int_{-R+it/2a}^{R+it/2a} - \int_{-R}^{-R+it/2a}\right) g(z)dz.$$

Les deux intégrales $\int_R^{R+it/2a} g(z)dz$ et $\int_{-R}^{-R+it/2a} g(z)dz$ tendent vers 0 quand $R \to +\infty$. L'intégrale $\int_{-R}^{R} g(z)dz$ tend vers $\int_{-\infty}^{\infty} g(z)dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ et ceci montre que $\int_{-R+it/2a}^{R+it/2a} g(z)dz$ qui tend $\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{t}{2a}\right)^2} dx$ quand $R \to +\infty$ tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. On en déduit que

$$I_{a,t} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

et la proposition. □

Autre preuve. Donnons une autre preuve du fait que $\widehat{f}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. Nous avons

$$f_a'(x) + 2axf_a(x) = 0.$$

Prenant la transformée de Fourier des deux membres de l'équation précédente, grâce à la proposition 2.2., nous avons

$$\widehat{f_a'}(\xi) + \widehat{2axf_a}(\xi) = i\xi\widehat{f}_a(\xi) + 2ai\widehat{f}_a'(\xi) = 0$$

donc

$$\widehat{f}_a'(\xi) + \frac{\xi}{2a}\widehat{f}_a(\xi) = 0,$$

soit encore

$$\left(\widehat{f}_a(\xi) e^{\frac{\xi^2}{4a}}\right)' = 0.$$

Ceci entraîne que

$$\widehat{f}_a(\xi) = \widehat{f}_a(0) e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

avec
$$\widehat{f}_a(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$
□

2.5. Théorème. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*
$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}d\xi.$$

Preuve. Si on note
$$\mathcal{G}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}d\xi,$$
le fait que $\mathcal{G}f(x) = (2\pi)^{-n}\widehat{f}(-x)$ montre que $\mathcal{G}$ envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de manière continue.
Il reste donc à vérifier $\mathcal{G}\circ\mathcal{F} = \mathcal{F}\circ\mathcal{G} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$.
Nous allons prouver que $\mathcal{G}\circ\mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ (l'autre égalité se prouvant de manière analogue), c'est-à-dire que
$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}dy\, e^{i\langle\xi,x\rangle}d\xi = f(x).$$

Mais la fonction $(y,\xi)\mapsto e^{i\langle\xi,x-y\rangle}f(y)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. On ne peut donc pas intervertir les intégrales.
Cependant, il découle du théorème de convergence dominée que
$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle-\varepsilon\|\xi\|^2}d\xi$$

Comme la fonction $(y,\xi)\mapsto e^{i\langle\xi,x-y\rangle}f(y)e^{-\varepsilon\|\xi\|^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ pour $\varepsilon>0$, on peut appliquer le théorème de Fubini et en déduire que
$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle-\varepsilon\|\xi\|^2}d\xi = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}dy\, e^{i\langle\xi,x\rangle}e^{-\varepsilon\|\xi\|^2}d\xi$$
$$= \int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{i\langle\xi,x-y\rangle-\varepsilon\|\xi\|^2}d\xi\right)dy = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2}\int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\varepsilon}}dy.$$
Posant dans la dernière intégrale $u = \frac{x-y}{2\sqrt{\varepsilon}}$, la dernière intégrale est donc égale à
$$2^n\pi^{n/2}\int_{u\in\mathbb{R}^n} f(x+2\varepsilon u)e^{-\|u\|^2}du.$$

Une application directe du théorème de la convergence dominée nous donne
$$\int_{u\in\mathbb{R}^n} f(x+2\varepsilon u)e^{-\|u\|^2}du \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} f(x)\int_{u\in\mathbb{R}^n} e^{-\|u\|^2}du = \pi^{\frac{n}{2}}f(x).$$

Le théorème est prouvé. □

Remarque. *On montre de même que, si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ est tel que $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors la même formule d'inversion est valable (Exercice 2.8 : le prouver).*

2.6. Théorème. *Si* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *alors*

$$\int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx.$$

Preuve. En effet

$$\begin{aligned}\int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi)e^{-i\langle x,\xi\rangle}d\xi\, dx \\ &= \int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx\, g(\xi)d\xi \qquad \text{(grâce au théorème de Fubini)} \\ &= \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi\end{aligned}$$

□

2.6. Théorème. *Si* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *alors*

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi = (2\pi)^n \int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Preuve. En effet, si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{\overline{g}}(-\xi)d\xi = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \widehat{\widehat{f}}(\xi)\overline{g(-\xi)}d\xi$$

grâce au théorème précédent. Or le théorème 2.5 nous donne $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = (2\pi)^n f(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Donc la dernière intégrale vaut

$$(2\pi)^n \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} f(-\xi)\overline{g(-\xi)}d\xi = (2\pi)^n \int_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

□

2.7. Corollaire. (Théorème de Plancherel) *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *alors*

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Preuve. Exercice 2.9. □

2.8. Corollaire. *La transformée de Fourier se prolonge de manière unique en une application continue notée encore* $\mathcal{F}$ *de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*. De plus, pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2.$$

Preuve. Exercice 2.10. □

2.9. Théorème. *Si* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *alors* $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. De plus*

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g \qquad et \qquad \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g.$$

Preuve. Exercice 2.11. (application du théorème de Fubini). □

3. Les distributions tempérées. Exemples

3.1. Définition. Nous appelons *distribution tempérée* toute forme linéaire continue $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre N, des multi-indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, $\beta_1, \ldots, \beta_N$ et une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{i=1}^{N} \|\varphi\|_{\alpha_i, \beta_i}.$$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées.

3.2. Quelques exemples. (laissés en Exercice 2.12.)
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Si $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *est telle qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad |f(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^n$$

(on dit que f *est à croissance lente), alors* $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Toute distribution à support compact est une distribution tempérée.

3.3. Théorème. *Soit* (T_j) *une suite de distributions tempérées telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad \lim_{j \to +\infty} \langle T_j, \varphi \rangle \textit{ existe.}$$

Alors la forme linéaire T *sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{j \to +\infty} \langle T_j, \varphi \rangle$$

est une distribution tempérée.

Preuve. Analogue à la preuve du théorème 3.2 de la partie sur les distributions. (Exercice 2.13. Donner les détails) □

3.4. Exemples. (Exercice 2.14.)
Si f *est une fonction positive intégrable telle que* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$, *alors si* $f_j(x) = j^n f(jx)$, *la suite* f_j *converge vers* δ_0 *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Le peigne de Dirac : La série de distributions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ *converge au sens des distributions tempérées vers une distribution tempérée, appelée le peigne de Dirac.*

4. Opérations sur les distributions tempérées.

4.1. Définition. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors la dérivée $\partial^\alpha T$ est la distribution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

4.2. Proposition. *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *alors* $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$.

Preuve. Exercice 2.15. □

4.3. Définition. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la *transformée de Fourier* $\mathcal{F}T$ de T est la distribution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle.$$

On la note aussi $\widehat{T}$.

4.4. Proposition. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}$.*

Preuve. Exercice 2.16. □

4.5. Définition. On dit qu'une fonction f est *à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées*, ce que l'on note $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ si f est de classe C^∞ et si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\alpha > 0$ et $m_\alpha \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad |\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1 + \|x\|)^{m_\alpha}.$$

Nous avons le diagramme suivant (les flèches représentent des inclusions) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{D}(\mathbb{R})^n & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

Les fonctions $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ sont aussi appelées des "multiplicateurs" pour $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans le sens que le produit d'une telle fonction par une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est encore dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4.6. Théorème. *Soit $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$.*
(a) Pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(b) Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $fT_j \to fT$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Exercice 2.17. □

4.7. Théorème. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Exercice 2.18. Le prouver (on pourra définir la transformée de Fourier inverse de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de manière analogue à la transformée de Fourier). □

4.8. Théorème. *Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{T}_j \to \widehat{T}$.*

Preuve. Exercice 2.19. □

Exercice 2.20. Calculer $\mathcal{F}\delta_0$ et $\mathcal{F}1$.

4.9. Théorème. *Soit $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$ un polynôme. On note $P(i\partial)$ l'opérateur différentiel $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha i^{|\alpha|} \partial^\alpha$.*
Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors $P(i\partial)T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{F}(P(i\partial)T) = P(\cdot)\widehat{T}.$$

Preuve. Exercice 2.21. □

5. Transformation de Fourier dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Comme $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on peut donc définir la transformation de Fourier des distributions à support compact à l'aide de la transformation de Fourier des distributions tempérées.
D'autre part, comme les distributions à supports compacts agissent sur les fonctions de classe C^∞, il paraît naturel de définir la transformée de Fourier d'une distribution à support compact T par la formule

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}T(\xi) = \widehat{T}(\xi) = \left\langle T, e^{-i\langle \cdot, \xi \rangle} \right\rangle.$$

En fait, ces deux définitions coïncident. C'est l'énoncé du théorème suivant :

5.1. Théorème. *Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier appartient à $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ et on a*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}T(\xi) = \widehat{T}(\xi) = \left\langle T, e^{-i\langle \cdot, \xi \rangle} \right\rangle.$$

Preuve. Le fait que la transformation de Fourier de T soit dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est laissé en exercice (Exercice 2.22).
Montrons la formule énoncée. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par définition :

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle T, \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \right\rangle.$$

Une preuve analogue à celle du théorème 7.2 de la partie sur les distributions montre que

$$\left\langle T, \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \langle T, \xi \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle} \rangle dx = \left\langle \langle T, e^{-i\langle x, \cdot \rangle} \rangle, \varphi \right\rangle$$

(on peut permuter l'action de la distribution et l'intégration). (Exercice 2.23) On obtient donc le résultat. □

Exercice 2.24. Montrer que pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\widehat{\delta_0} = 1, \quad \widehat{\partial^\alpha \delta_0} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha, \qquad \widehat{\delta_a} = e^{-i\langle a, \cdot \rangle}$$

$$\widehat{1} = (2\pi)^n \delta_0, \quad \mathcal{F}(e^{i\langle a, \cdot \rangle}) = (2\pi^n) \delta_a, \quad \mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^n i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0.$$

Notes bibliographiques.

Une définition alternative des distributions (définition utilisée par les physiciens) peut être trouvée dans [*Sc*]. Pour les physiciens, les distributions sont les limites faibles (ou au sens des distributions pour notre terminologie) des suites de fonctions L^1_{loc}.
La présentation heuristique que j'ai faite des distributions dans ce polycopié peut être trouvée dans l'excellent ouvrage [Bo].
La preuve usuelle du théorème 3.2 est une preuve du type de la preuve du théorème de Banach-Steinhaus. Elle est délicate pour la simple raison que la topologie de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas métrisable, et que cet espace est vu comme une limite inductive d'espaces de Fréchet, notion très au-delà du niveau du concours de l'agrégation. La preuve présentée ici, totalement élémentaire, est due à Vladimirov [Vl].
L'heuristique de la transformée de Fourier présentée ici est classique. On peut la trouver dans [Sc]. La présentation de la transformée de Fourier faite ici est largement inspirée par les textes [AM], [Bo], [Fo], [Ru], [Ro], [Zu].

Bibliographie.

[AM] Hélène Airault, Paul Malliavin, Intégration, analyse de Fourier, probabilités, analyse gaussienne, Masson, 1993.
[Bo] Jean-Michel Bony, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Théorie des distributions et analyse de Fourier, Editions de l'école polytechnique, 2001.
[Fo] Gerald Folland, Introduction to partial differential equations,Princeton University Press, 1995.
[GPS] Hans-Jürgen Glaeske, Krystyna Skórnik, Anatoly Prudnikov, Operational Calculus and Related Topics, Chapman & Hall, 2006.
[HL] Francis Hirsch, Gilles Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod, 1997.
[Ru] Walter Rudin, Analyse Fonctionnelle, Ediscience International, 1995.
[Ro] Guy Roos, Analyse et Géométrie, Méthodes hilbertiennes, Dunod, 2002.
[Sc] Thomas Schücker, Distributions, Fourier Transforms and Some of Their Applications to Physics, World Scientific Lecutre Notes in Physics Vol 137, 1991.
[Vl] Vasiliĭ Vladimirov, Distributions en physique mathématique, Editions Mir Moscou, 1979.
[Wi] Michel Willem, Analyse harmonique réelle, collection méthodes, Hermann, 1995.
[Zu] Claude Zuily, Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles, Dunod, 2002.

Proposition de développements

Pour les leçons :

254 : Espaces de Schwartz et distributions tempérées.

255 : Dérivation au sens des distributions. Exemples et applications.

256 : Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Développement 1 : La formule d'inversion de Fourier (théorème 2.5). Peut illustrer les leçons 1, 2, 8, 34, 35, 39, 40, 45, 47, 54 et 56

Développement 2 : Le théorème de Lévy. Peut illustrer les leçons 1, 35, 39, 40, 41, 42, 47, 50, 54, 56.

Théorème de Lévy, Queffélec-Zuily, p.526.

Enoncé. Soit (X_n) une suite de v.a.r. On a équivalence entre
1) X_n converge en loi vers X.
2) φ_{X_n} converge vers φ_X simplement.

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2). En effet, la convergence en loi implique que

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_{X_n} \longrightarrow \int_R f dP_X$$

pour toute fonction f continue bornée à valeurs dans $\mathbb{C}$. On applique alors cela aux fonctions $f : t \mapsto e^{-itx}$.
Montrons la réciproque, 2) $\Rightarrow$ 1). Considérons d'abord le cas où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, l'ensemble des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

On a

$$E[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)dP_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)dt \right) dP_{X_n}(x).$$

Or, $(t, x) \mapsto e^{-itx}\varphi(t) \in L^1(\mathbb{R}^2, dt \otimes dP_{X_n})$. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |e^{-itx}\varphi(t)| dt \otimes dP_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \, dP_{X_n}(x) =$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}} dP_{X_n}(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \right) = 1 \times \|\varphi\|_1 < +\infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer et nous donne

$$E(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_{X_n}(t)dt.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\varphi(t)\varphi_{X_n}(t)| \leq |\varphi(t)|$ et que φ_{X_n} converge simplement vers φ_X, le théorème de la convergence dominée implique que

$$E(f(X_n)) \longrightarrow_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_X(t)dt = E(f(X)),$$

pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Or $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. En effet, cela découle du fait que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. Comme la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, le résultat en découle.

Montrons maintenant que, si $f \in C_0(\mathbb{R})$ alors $E(f(X_n))$ converge vers $E(f(X))$.
Soit $\epsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_\infty \leq \epsilon$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|E(g(X_n)) - E(f(X_n))| \leq E(|f-g|(X_n)) \leq \epsilon$ et de même, $|E(g(X)) - E(f(X))| \leq \varepsilon$.
En particulier, comme $E(g(X_n))$ converge vers $E(g(X))$, on a l'existence d'un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $|E(g(X_n)) - E(g(X))| \leq \epsilon$.
On a alors, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}|E(f(X_n)) - E(f(X))| &\leq \\ &|E(f(X_n)) - E(g(X_n))| + |E(g(X_n)) - E(g(X))| + |E(g(X)) - E(f(X))| \leq \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que, si $f \in C_0(\mathbb{R})$ alors $E(f(X_n))$ converge vers $E(f(X))$. Le théorème II.18'. permet de conclure.

Remarque. Pour simplifier la preuve et éviter la question difficile "A-t'on l'égalité $\mathcal{A}(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R})$ ou non ?", on peut remplacer directement dans la preuve précédente $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ et $L^1(\mathbb{R})$ par l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Autre remarque. Le théorème central limite page 529 est une très belle application des formules de Taylor...

Dernière remarque. Montrons que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions C^∞ à support compact est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \notin [-A, A]$, on ait $|f(x)| \leq \varepsilon$.
Grâce au théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [-A-1, A+1]$, on ait $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.
Soit θ une fonction de classe C^∞, qui vaut 1 sur $[-A, A]$ et qui vaut 0 en dehors de $[-A-1, A+1]$ et qui est à valeurs dans $[0, 1]$.
La fonction $g = P\theta$ vérifie $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, on a trois cas :
- si $x \in [-A, A]$: on a par construction $|f(x) - g(x)| = |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.
- si $x \notin [-A-1, A+1]$: on a $|f(x) - g(x)| = |f(x)| \leq \varepsilon$.
- si $x \in [-A-1, -A[\cup]A, A+1]$: on a

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| = |f(x) - \theta(x)P(x)| &= |\theta(x)(f(x) - P(x)) + (1-\theta(x))f(x)| \\ &\leq \theta(x)|f(x) - P(x)| + (1-\theta(x))|f(x)| \leq \theta(x)\varepsilon + (1-\theta(x))\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Première preuve de la non-surjectivité de la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$. (extraite du site `www.bibmath.net`). Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ impaire. On note, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f}(x) = -2i \int_0^{\infty} f(t)\sin(xt)dt.$$

2. Prouver que la fonction $\phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ est définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$. 3. Montrer que l'on a, pour $R \geq 1$:

$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_0^{\infty} f(x) \left(\int_x^{Rx} \frac{\sin u}{u} du \right) dx.$$

En déduire :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_0^{\infty} f(x)\phi(x)dx.$$

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{\arctan x}{\ln(2 + x^2)}.$$

a. Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$.
b. On suppose que g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f. Montrer que f est nécessairement impaire (presque partout).
c. En déduire que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Solution.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-itx}dt}_{A} + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt.$$

En faisant le changement de variable $u = -t$, on a

$$A = \int_0^{\infty} f(-u)e^{iux}du = \int_0^{\infty} -f(u)e^{iux}du$$

et donc

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(t)(e^{-itx} - e^{itx})dt = -2i \int_0^{\infty} f(t)\sin(xt)dt.$$

2. La fonction $u \in [0, +\infty[\mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue (elle se prolonge par continuité en 0). De plus, une intégration par parties nous donne, pour $X \in [0, +\infty[$,

$$\psi(X) = \int_0^X \frac{\sin u}{u} du = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^X \frac{\sin u}{u} du = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\left[\frac{1 - \cos u}{u} \right]_{\varepsilon}^X + \int_{\varepsilon}^X \frac{1 - \cos u}{u^2} du \right).$$

De $1 - \cos u \sim_0 \frac{u^2}{2}$, on déduit que la limite précédente vaut

$$\psi(X) = \frac{1 - \cos X}{X} + \int_0^X \frac{1 - \cos u}{u^2} du.$$

La fonction ψ est donc continue. Le fait que $\frac{1-\cos X}{X}$ tende vers 0 quand $X \to +\infty$ et le fait que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2} du$ soit absolument convergente montre que $\psi(X)$ admet une limite L quand $X \to +\infty$.
En particulier, pour $x \in [0, +\infty[$

$$\phi(x) = L - \psi(x).$$

Ceci prouve que ϕ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$. Comme ϕ tend vers 0 au voisinage de l'infini, on en déduit que ϕ est bornée.

3. Soit $R > 1$. On a

$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_{t=1}^R \left(\int_{x=0}^\infty f(x) \sin(xt) dx \right) \frac{dt}{t}.$$

Or

$$\int_{t=1}^R \left(\int_{x=0}^\infty |f(x) \sin(xt)| dx \right) \frac{dt}{t} \leq \int_{t=1}^R \left(\int_{x=0}^\infty |f(x)| dx \right) \frac{dt}{t}$$
$$= \|f\|_1 \int_{t=1}^R \frac{dt}{t} = \|f\|_1 \ln R < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_{x=0}^\infty f(x) \left(\int_{t=1}^R \frac{\sin(xt)}{t} dt \right) dx.$$

Or, le changement de variable $u = xt$ montre que

$$\int_{t=1}^R \frac{\sin(xt)}{t} dt = \int_{u=x}^{Rx} \frac{\sin u}{u} du,$$

ce qui nous donne bien la relation

$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_0^\infty f(x) \left(\int_x^{Rx} \frac{\sin u}{u} du \right) dx,$$

soit encore

$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_0^\infty f(x) \left(\phi(x) - \phi(Rx) \right) dx.$$

Comme ϕ est bornée, mettons par $M > 0$ en valeur absolue, nous avons

$$\forall x \in [0, +\infty] |f(x)| (\varphi(x) - \varphi(Rx)) \leq 2M|f(x)|$$

et $2M|f| \in L^1(\mathbb{R}^+)$. De plus, pour tout $x > 0$, $\lim_{R \to +\infty} \phi(Rx) = 0$. Il découle donc du théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt$$

existe et vaut

$$-2i \int_0^\infty f(x) \phi(x) dx.$$

4. a. C'est évident.

b. g est impaire. Si g est la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 = \widehat{g}(x) + \widehat{g}(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt}_{B}.$$

Le changement de variable $u = -t$ nous donne

$$B = \int_{\mathbb{R}} f(-u)e^{-iux}du,$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 = \widehat{g}(x) + \widehat{g}(-x) = \int_{\mathbb{R}} (f(t) + f(-t))e^{-itx}dt.$$

La transformation de Fourier étant injective, on en déduit que $f(t)+f(-t) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ donc que f est impaire presque partout.

c. Si g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f, d'après 4.b, f est impaire. D'après la question 3,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_1^R \frac{g(t)}{t} dt$$

existe. Or

$$\frac{g(t)}{t} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{2t \ln t}.$$

Le critère de Bertrand montre que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_1^R \frac{g(t)}{t} dt = +\infty,$$

ce qui est absurde.

Plusieurs développements possibles : Solutions fondamentales du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$, du $\overline{\partial}$ dans $\mathbb{C}$ (par application de la transformation de Fourier, voir [Bo] p. 182, ou avec les méthodes décrites dans le polycopié ou dans les ouvrages [Bo] et [HL]). Les distributions tempérées harmoniques sont les polynômes, donc les fonctions harmoniques bornées sont constantes ([Bo], p.182). Peuvent illustrer les leçons 1, 40, 47, 54, 55, 56.
D'autres développements peuvent être trouvés dans [Ru], chapitre 8.
D'autres encore dans [Ro], chapitre 9.

A la suite, quelques exemples extraits de [GPS].

Exercice. *On se propose de calculer une solution fondamentale du Laplacien T dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$ que l'on suppose tempérée.*

Montrez qu'on a $\widehat{T} = \frac{1}{\|\xi\|}$ où $\frac{1}{\|\xi\|}$ désigne la distribution tempérée associée à la fonction $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{\|\xi\|}$ (pourquoi est-ce une distribution tempérée ?)

Montrez que $\frac{1}{\|\xi\|} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\|\xi\|} e^{-\lambda \|\xi\|^2}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

En déduire que

$$T = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\xi\|} e^{-\lambda \|\xi\|^2} e^{i\langle \xi, x\rangle} d\xi \right)$$

est une solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, on pose

$$\forall \lambda > 0, \qquad f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\xi\|} e^{-\lambda \|\xi\|^2} e^{i\langle \xi, x\rangle} d\xi.$$

Montrez que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.

En déduire f puis T.

Exercice. *On se propose de calculer une solution fondamentale T de $\overline{\partial}$ dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose tempérée.*

Montrez qu'on a $\widehat{T} = \frac{2i}{\xi_1 + i\xi_2}$ où $\frac{2i}{\xi_1 + i\xi_2}$ désigne la distribution tempérée associée à la fonction $\xi \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{2i}{\xi_1 + i\xi_2}$ (pourquoi est-ce une distribution tempérée ?)

Montrez que $\frac{2i}{\xi_1 + i\xi_2} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2i}{\xi_1 + i\xi_2} e^{-\lambda \|\xi\|^2}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

En déduire que

$$T = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{4\pi^2} \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2i}{\xi_1 + i\xi_2} e^{-\lambda \|\xi\|^2} e^{i\langle \xi, x\rangle} d\xi \right)$$

est une solution fondamentale du $\overline{\partial}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Pour $x \in \mathbb{R}^2$ fixé, on pose

$$\forall \lambda > 0, \qquad f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2i}{\xi_1 + i\xi_2} e^{-\lambda \|\xi\|^2} e^{i\langle \xi, x\rangle} d\xi.$$

Montrez que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.

En déduire f puis T.

Exercice. *Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. Montrez qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n \, dx = a_n.$$

Exercice. *Est-ce que* $e^x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *? et* $e^x \sin(e^x)$ *?*

Exercice. *Soit* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *telle que* $-T'' + T \in L^2(\mathbb{R})$*. Montrez que* $\widehat{T} \in L^2(\mathbb{R})$*, ainsi que* T*,* T' *et* T''*.*

Exercice. *En considérant la suite de fonctions* $\overline{z}/(|z|^2 + \frac{1}{n^2})$*, montrez que* $\overline{\partial}(1/z) = \pi\delta_0$*.*

Exercice. *Soit* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$*. Montrez qu'il existe une fonction* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *telle que* $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x)$*.*
Résoudre l'équation $x^2 T = 0$*.*
puis l'équation $x^2 T + 2xT = 0$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$*.*