Agrégation de Mathématiques **2009-2010**
CMI **Universités d'Aix-Marseille**

INTÉGRATION

Préparation à l'oral.

Fonction Γ ([Go], p.290 et p.260). [(D: 7, 29, 35, 39, 41, 45, 46, 47) Extraire les points à traiter en fonction de la leçon à illustrer.]

Soit la fonction *gamma* définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \text{pour } x > 0.$$

1. Montrer que Γ est bien définie, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que Γ est logarithmiquement convexe (*i.e.* $\log \Gamma$ est convexe. On pourra pour cela montrer qu'une fonction F est logarithmiquement convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si $F'^2 \leq FF''$, et utiliser l'inégalité de Cauchy -Schwarz).
3. Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Gamma(n+1) = n!.$$
4. Donner un équivalent de Γ en $0+$ et tracer son graphe.
5. Montrer que Γ se prolonge holomorphiquement au demi-plan $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\ z > 0\}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall z \in \mathbb{H}^+, \qquad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$
En déduire que Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.
Autre méthode : Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{H}^+, \qquad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$
En déduire que Γ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et les résidus de Γ aux points $-n$ quand $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$
En déduire que
$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$
Montrer aussi que
$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^x}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, \sin^{2x-1} t \, dt.$$
7. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. Démontrer la formule de Weierstraß:

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right],$$

où γ désigne la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$.

9. Démontrer la *formule de duplication* :

$$\forall x > 0, \qquad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x).$$

(Utiliser le résultat de la question 6). Peut-on prolonger cette identité sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$?

10. *Développement Eulérien de* sin.

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On désigne par f_α l'application continue, C^1 par morceaux et $2\pi-$périodique définie par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f_\alpha(t) = \cos \alpha t.$$

Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad \cos \alpha t = \frac{\sin \alpha t}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nt.$$

puis que

$$\operatorname{cotan} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)},$$

et enfin que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

b. Soit $x \in]0, \pi[$ et

$$f : [0, x] \ni t \mapsto \operatorname{cotan} t - \frac{1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \in \mathbb{R}.$$

En intégrant cette fonction f sur l'intervalle $[0, x]$, et en prenant l'exponentielle des deux membres de l'égalité obtenue, montrez que :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \qquad \sin t = t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

c. Montrez que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

11. *Formule des compléments.* Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

puis que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \qquad \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

12. *Dérivée logarithmique de* Γ. Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire, après avoir vérifié la convergence de l'intégrale, que

$$\int_0^\infty (\ln t)e^{-t}dt = -\gamma.$$

13. Montrez que, pour $x > 0$,

$$(\ln\Gamma)''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

14. *Première formule de Binet.* [AAR]

a. *Formule de Dirichlet.* On se propose de montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \frac{1}{z}\left(e^{-t} - \frac{1}{(1+z)^x}\right) dz.$$

Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{e^z - e^{-sz}}{z} dz = \ln s. \tag{$*$}$$

En considérant l'intégrale double

$$\int_{z=0}^\infty \int_{s=0}^\infty s^{x-1} \frac{e^{-s-z} - e^{-s(1+z)}}{z} ds\, dz,$$

qui vaut d'une part $\Gamma'(x)$ et d'autre part $\Gamma(x)\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right) dz$, déduire le résultat.

b. *Formule de Gauss.* Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{\delta\to 0+}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z}dz - \int_\delta^\infty \frac{dz}{z(1+z)^x}\right) = \lim_{\delta\to 0+}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{z}dz - \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \frac{e^{-tx}dt}{1-e^{-t}}\right)$$

$$= \lim_{\delta\to 0+}\left(\int_\delta^{\ln(1+\delta)} \frac{e^{-z}}{z}dz + \int_{\ln(1+\delta)}^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right) dt\right) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right) dz.$$

c. Montrer en utilisant la formule précédente et $(*)$ que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{2x} + \ln x - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) e^{-tx} dt.$$

En déduire que

$$\forall x > 0, \qquad \ln\Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt,$$

puis que

$$\forall x > 0, \qquad \ln\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-tx}}{t} dt - I$$

où

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

En utilisant la formule de Stirling, montrez que $I = 1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$. En déduire la *première formule de Binet* :

$$\forall x > 0, \qquad \ln\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-tx}}{t} dt.$$

Comportement à l'infini d'une fonction intégrable. [L] On se propose de montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On note $E = \{x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$. Pour un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$, on note $|A|$ la mesure de Lebesgue de A.

1. Montrez que $|E| < +\infty$.
2. On se propose de montrer que, pour presque tout $x \in [0, 1]$, nous avons $nx \in E$ pour seulement un nombre fini d'entiers $n \geq 1$. Posons, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $E_m = E \cap]m - 1, m]$. Soit $a \in]0, 1[$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$F_n = \left(\frac{1}{n}E\right) \cap [a, 1].$$
Montrez que
$$F_n = \frac{1}{n} \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} (E_m \cap [na, n[).$$
Montrez que
$$\sum_{n=1}^{\infty} |F_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n}|E_m \cap [na, n[| = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{[m/a]} \frac{1}{n}|E_m \cap [na, n[| \leq$$
$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} |E_m| \sum_{n=m}^{[m/a]} \frac{1}{n} \leq (1 - \ln a) \sum_{m=1}^{\infty} |E_m| = (1 - \ln a)|E|$$
En utilisant le Lemme de Borel-Cantelli (c'est-à-dire que
$$\int \sum \chi_{F_n}(x)dx = \sum \int \chi_{F_n}(x)dx < +\infty,$$
donc $\sum \chi_{F_n} < +\infty$ presque partout), en déduire que presque tout $x \in [a, 1]$ appartient à un nombre fini de F_n.
Montrer que, pour presque tout $x \in [0, 1]$, pour n assez grand, $nx \notin E$.
3. En utilisant une famille dénombrable d'ε, montrez que, pour presque tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. Par un changement de variable linéaire, montrez que ce résultat s'étend à presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Formule sommatoire de Poisson. ([QZ], p.93, [CFM] p.98, [Go] p.269) ([D: 35, 39, 40, 41, 46, 47]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 vérifiant
$$\max(|f(x)|, |f'(x)|) = \mathcal{O}(1/x^\alpha) \qquad \text{quand } |x| \to +\infty$$
où $\alpha > 1$. On se propose de montrer que, sous ces conditions, si $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt$, nous avons la formule suivante :
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n).$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $F(x)$ de classe C^1 et $1-$périodique.
2. Calculez le développement en série de Fourier de F. Conclure.
3. Applications ([QZ], p.116). Soit $a > 0$. Montrez que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}\coth \pi a.$$
(appliquer la formule de poisson à $f(x) = e^{-a|x|}$).
([Go], p.269) Montrer que
$$\forall s > 0, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2/s}.$$

(appliquer la formule de Poisson à la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$.

On note, pour $x \in]-1,1[$, $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}$. Cette série entière est appelée la fonction thêta de Jacobi. Donner un équivalent lorsque $x \to 1$ de $\Theta(x)$.

Prolongement holomorphe de la fonction ζ de Riemann. ([QZ] p.28, [Go] p.278) ([D: 7, 30, 35, 39, 41, 45, 47]) On admet ici l'identité fonctionnelle (corollaire de la formule sommatoire de Poisson)

$$\forall t > 0, \qquad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \text{où } \theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que Re $s > 1$, on note

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette fonction est appelée *Fonction zêta de Riemann*.

1. Montrez que, si $s \in \mathbb{C}$ est tel que Re $s > 1$, alors $\zeta(s)$ est bien défini.
   Montrez que
   $$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy.$$
2. On considère pour $t > 0$, la fonction
   $$\widetilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$
   Montrez que :
   $$\forall t > 0, \qquad \widetilde{\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}.$$
   Montrez que
   $$\int_0^1 \widetilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_1^{\infty} \widetilde{\theta}(u) u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$
   En déduire que
   $$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \psi(s)$$
   où ψ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3. En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.
4. Déduire de la question 2 que
   $$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}, \qquad \zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s).$$
5. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$, Re $s > 1$ implique
   $$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$
   En déduire que ζ n'a pas de zéro sur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1\}$. Déduire de la question précédente que tous les zéros de la fonction ζ sont de deux types : les entiers -2, -4, -6, ... et les autres zéros qui sont dans la bande $\{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1\}$.
6. Montrer que, pour $s \in \mathbb{R}$,
   $$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \qquad \text{quand } s \to 1.$$

Montrez que

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

Nombres et polynômes de Bernoulli. Formule d'Euler-Maclaurin ([Go] p.295, [CFM] p.112). ([D: 18, 23, 26, 24, 30, 35, 41, 43, 46])

1. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes B_n pour $n \geq 0$ vérifiant les propriétés suivantes (*polynômes de Bernoulli*)
   (i) $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \geq 2$;
   (ii) $B'_n = nB_{n-1}$ si $n \geq 1$;
   (iii) $B_0 = 1$.
2. Montrer que l'on a les deux égalités suivantes, valables pour $n \geq 1$:
$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \qquad \text{et} \qquad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$
3. Montrer que l'on a le développement en série entière au voisinage de 0 :
$$e^{zx}\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$
4. Montrer que si $0 \leq x \leq 1$ et $n \geq 1$, on a les développements en série
$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} 2(2n)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi k x}{(2\pi k)^{2n}};$$
$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2(2n+1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k x}{(2\pi k)^{2n+1}}$$
Montrez que $\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} b_n$ où $b_n = (-1)^{n+1} B_{2n}(0)$ est le $n-$ième nombre de Bernoulli. Montrer que $b_n > 0$ et que pour $x \in [0,1]$, $|B_{2n+1}(x)| \leq \left(n+\frac{1}{2}\right) b_n$.
5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m < n$. Montrer que pour $m, n \in \mathbb{Z}$ et $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ de classe C^R, on a
$$f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}[f(m) + f(n)] +$$
$$+ \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h}{h}[f^{(h-1)}(n) - f^{(h-1)}(m)] + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \widetilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)dt$$
où $\widetilde{B}_n$ est l'application de$\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $1-$périodique, qui coïncide avec B_n sur $]0,1[$ et telle que $\widetilde{B}_n(0) = \frac{1}{2}[B_n(0) + B_n(1)]$.
6. (Application) Donner, lorsque $n \to +\infty$, un développement asymptotique à un nombre fixé quelconque de termes de $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Lien entre γ et ζ. ([AF], p.651) ([D: 23, 30, 35, 39, 41, 43, 47])

1. Montrez que $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.
2. Exprimer $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sous forme d'une série pour $n \geq 2$. Montrez que, en utilisant par exemple l'identité $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ que
$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$
3. Montrer que
$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}\right) = \ln 2 - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}\right).$$

En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\gamma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

Méthode de Laplace. ([Ro], p.339) ([D: 35, 39, 47]) Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non, avec $a < b \leq \infty$), $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b[$ pour un certain réel t_0. On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$.

On recherche un équivalent pour $t \to +\infty$ de l'intégrale

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx.$$

1. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x$, montrer que
$$F(t) \sim \frac{f(0)}{t}.$$
On pourra couper en $\int_0^\alpha$ et $\int_\alpha^b$, et étudier la première intégrale par convergence dominée.
2. Si $\varphi' > 0$ sur $[a,b[$, montrer que
$$F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t}.$$
On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y$ et utiliser la question 1.
3. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$, montrer que
$$F(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{f(0)}{\sqrt{t}}$$
Même indication qu'en 1.
4. Si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, montrer que
$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$
On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y^2$ et utiliser 3.
5. Application. Donner un équivalent pour $t \to +\infty$ de $\Gamma(t+1)$.

Intégration des relations de comparaison. Comparaison séries-intégrales. ([VP], p.16, [Go], p.212) ([D: 23, 24, 30, 35, 39, 41, 47]).

1. Soit $f : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1. Si $\dfrac{f'}{f} \sim \dfrac{a}{x}$ ($a+1$ et $a \neq 0$) ou si $\dfrac{f'}{f} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (cas $a = 0$) alors :
   a. Si $a > -1$, $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$ diverge et $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \sim \frac{xf(x)}{a+1}$.
   b. Si $a < -1$, $\displaystyle\int_{x^0}^{\infty} f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_{x}^{\infty} f(t)dt \sim \frac{xf(x)}{a+1}$.
   c. Application : $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$.
2. Soit $f : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 telle que f' ne s'annule pas, $h = \dfrac{f}{f'}$ est dérivable et $h' = o(1)$ au voisinage de l'infini. Alors :
   a. Si $f' > 0$, $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$ diverge et $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \sim \frac{f^2}{f'}$.
   b. Si $f' < 0$, $\displaystyle\int_{x^0}^{\infty} f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_{x}^{\infty} f(t)dt \sim \frac{f^2}{|f'|}$.
   c. Application : $\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
3. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1. Si $\dfrac{f'}{f} \sim a$ ($a \neq 0$) alors :

a. Si $\int_1^\infty f(t)dt$ diverge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge et $\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \frac{a}{1-e^{-a}} \int_1^n f(t)dt$.

b. Si $\int_1^\infty f(t)dt$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge et son reste

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \sim \frac{a}{1-e^{-a}} \int_n^\infty f(t)dt.$$

c. Application : $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème de Lévy, Queffélec-Zuily, p.526.

Enoncé. Soit (X_n) une suite de v.a.r. On a équivalence entre
1) X_n converge en loi vers X.
2) φ_{X_n} converge vers φ_X simplement.

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2). En effet, la convergence en loi implique que

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_{X_n} \longrightarrow \int_R f dP_X$$

pour toute fonction f continue bornée à valeurs dans $\mathbb{C}$. On applique alors cela aux fonctions $f : t \mapsto e^{-itx}$. Montrons la réciproque, 2) $\Rightarrow$ 1). Considérons d'abord le cas où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, l'ensemble des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t)dt.$$

On a

$$E[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)dP_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)dt \right) dP_{X_n}(x).$$

Or, $(t,x) \mapsto e^{-itx}\varphi(t) \in L^1(\mathbb{R}^2, dt \otimes dP_{X_n})$. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |e^{-itx}\varphi(t)| dt \otimes dP_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \, dP_{X_n}(x) =$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} dP_{X_n}(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \right) = 1 \times \|\varphi\|_1 < +\infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer et nous donne

$$E(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_{X_n}(t)dt.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\varphi(t)\varphi_{X_n}(t)| \leq |\varphi(t)|$ et que φ_{X_n} converge simplement vers φ_X, le théorème de la convergence dominée implique que

$$E(f(X_n)) \longrightarrow_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_X(t)dt = E(f(X)),$$

pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

Or $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. En effet, cela découle du fait que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. Comme la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, le résultat en découle.

Montrons maintenant que, si $f \in C_0(\mathbb{R})$ alors $E(f(X_n))$ converge vers $E(f(X))$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_\infty \leq \epsilon$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|E(g(X_n)) - E(f(X_n))| \leq E(|f-g|(X_n)) \leq \epsilon$ et de même, $|E(g(X)) - E(f(X))| \leq \varepsilon$.
En particulier, comme $E(g(X_n))$ converge vers $E(g(X))$, on a l'existence d'un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $|E(g(X_n)) - E(g(X))| \leq \epsilon$.
On a alors, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}&|E(f(X_n)) - E(f(X))| \leq \\ &\qquad |E(f(X_n)) - E(g(X_n))| + |E(g(X_n)) - E(g(X))| + |E(g(X)) - E(f(X))| \leq \\ &\qquad\qquad \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que, si $f \in C_0(\mathbb{R})$ alors $E(f(X_n))$ converge vers $E(f(X))$. Le théorème II.18'. permet de conclure.

Remarque. Pour simplifier la preuve et éviter la question difficile "A-t'on l'égalité $\mathcal{A}(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R})$ ou non ?", on peut remplacer directement dans la preuve précédente $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ et $L^1(\mathbb{R})$ par l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Autre remarque. Le théorème central limite page 529 est une très belle application des formules de Taylor...

Dernière remarque. Montrons que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions C^∞ à support compact est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \notin [-A, A]$, on ait $|f(x)| \leq \varepsilon$.

Grâce au théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [-A-1, A+1]$, on ait $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

Soit θ une fonction de classe C^∞, qui vaut 1 sur $[-A, A]$ et qui vaut 0 en dehors de $[-A-1, A+1]$ et qui est à valeurs dans $[0, 1]$.

La fonction $g = P\theta$ vérifie $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, on a trois cas :
- si $x \in [-A, A]$: on a par construction $|f(x) - g(x)| = |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.
- si $x \notin [-A-1, A+1]$: on a $|f(x) - g(x)| = |f(x)| \leq \varepsilon$.
- si $x \in [-A-1, -A[\cup]A, A+1]$: on a

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| &= |f(x) - \theta(x)P(x)| = |\theta(x)(f(x) - P(x)) + (1-\theta(x))f(x)| \\ &\leq \theta(x)|f(x) - P(x)| + (1-\theta(x))|f(x)| \leq \theta(x)\varepsilon + (1-\theta(x))\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Première preuve de la non-surjectivité de la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$. (extraite du site `www.bibmath.net`). Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ impaire. On note, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f}(x) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(xt)dt.$$

2. Prouver que la fonction $\phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$ est définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$. 3. Montrer que l'on a, pour $R \geq 1$:

$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt = -2i\int_0^\infty f(x)\left(\int_x^{Rx} \frac{\sin u}{u}du\right)dx.$$

En déduire :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt = -2i\int_0^\infty f(x)\phi(x)dx.$$

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \frac{\arctan x}{\ln(2+x^2)}.$$

a. Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$.

b. On suppose que g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f. Montrer que f est nécessairement impaire (presque partout).

c. En déduire que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-itx}dt}_{A} + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt.$$

En faisant le changement de variable $u = -t$, on a
$$A = \int_0^\infty f(-u)e^{iux}du = \int_0^\infty -f(u)e^{iux}du$$

et donc
$$f(x) = \int_0^\infty f(t)(e^{-itx} - e^{itx})dt = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(xt)dt.$$

2. La fonction $u \in [0,+\infty[\mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue (elle se prolonge par continuité en 0). De plus, une intégration par parties nous donne, pour $X \in [0,+\infty[$,
$$\psi(X) = \int_0^X \frac{\sin u}{u}du = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^X \frac{\sin u}{u}du = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left[\frac{1-\cos u}{u}\right]_\varepsilon^X + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos u}{u^2}du\right).$$

De $1-\cos u \sim_0 \frac{u^2}{2}$, on déduit que la limite précédente vaut
$$\psi(X) = \frac{1-\cos X}{X} + \int_0^X \frac{1-\cos u}{u^2}du.$$

La fonction ψ est donc continue. Le fait que $\frac{1-\cos X}{X}$ tende vers 0 quand $X \to +\infty$ et le fait que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}du$ soit absolument convergente montre que $\psi(X)$ admet une limite L quand $X \to +\infty$.

En particulier, pour $x \in [0,+\infty[$
$$\phi(x) = L - \psi(x).$$

Ceci prouve que ϕ est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$. Comme ϕ tend vers 0 au voisinage de l'infini, on en déduit que ϕ est bornée.

3. Soit $R > 1$. On a
$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt = -2i\int_{t=1}^R\left(\int_{x=0}^\infty f(x)\sin(xt)dx\right)\frac{dt}{t}.$$

Or
$$\int_{t=1}^R\left(\int_{x=0}^\infty |f(x)\sin(xt)|dx\right)\frac{dt}{t} \le \int_{t=1}^R\left(\int_{x=0}^\infty |f(x)|dx\right)\frac{dt}{t}$$
$$= \|f\|_1\int_{t=1}^R\frac{dt}{t} = \|f\|_1 \ln R < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour obtenir
$$\int_1^R \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt = -2i\int_{x=0}^\infty f(x)\left(\int_{t=1}^R \frac{\sin(xt)}{t}dt\right)dx.$$

Or, le changement de variable $u = xt$ montre que

$$\int_{t=1}^{R} \frac{\sin(xt)}{t} dt = \int_{u=x}^{Rx} \frac{\sin u}{u} du,$$

ce qui nous donne bien la relation

$$\int_{1}^{R} \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_{0}^{\infty} f(x) \left(\int_{x}^{Rx} \frac{\sin u}{u} du \right) dx,$$

soit encore

$$\int_{1}^{R} \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_{0}^{\infty} f(x) \left(\phi(x) - \phi(Rx)\right) dx.$$

Comme ϕ est bornée, mettons par $M > 0$ en valeur absolue, nous avons

$$\forall x \in [0, +\infty] |f(x)|(\varphi(x) - \varphi(Rx)) \leq 2M|f(x)|$$

et $2M|f| \in L^1(\mathbb{R}^+)$. De plus, pour tout $x > 0$, $\lim_{R\to+\infty} \phi(Rx) = 0$. Il découle donc du théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{1}^{R} \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt$$

existe et vaut

$$-2i \int_{0}^{\infty} f(x)\phi(x) dx.$$

4. a. C'est évident.

b. g est impaire. Si g est la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 = \widehat{g}(x) + \widehat{g}(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt}_{B}.$$

Le changement de variable $u = -t$ nous donne

$$B = \int_{\mathbb{R}} f(-u) e^{-iux} du,$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 = \widehat{g}(x) + \widehat{g}(-x) = \int_{\mathbb{R}} (f(t) + f(-t)) e^{-itx} dt.$$

La transformation de Fourier étant injective, on en déduit que $f(t) + f(-t) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ donc que f est impaire presque partout.

c. Si g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f, d'après 4.b, f est impaire. D'après la question 3,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{1}^{R} \frac{g(t)}{t} dt$$

existe. Or

$$\frac{g(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{2t \ln t}.$$

Le critère de Bertrand montre que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{1}^{R} \frac{g(t)}{t} dt = +\infty,$$

ce qui est absurde.

Bibliographie.

[AAR] Andrews G., Askey R. and Roy R., Special Functions, Encycolpedia of Mathematica and its applications 71, Cambridge University Press.

[Av] Avez A., la leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation, Masson, deuxième édition.

[AF] Arnaudiès J.M. et Fraisse H., Cours de mathématiques -2, Dunod.

[Br] Brézis H., Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 3ème tirage.

[CFM] Chambert-Loir A., Fermigier S. et Maillot V., Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, Masson.

[Di] Dieudonné J., Calcul infinitésimal, Hermann, deuxième édition.

[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Ellipses.

[Gr] A. Gramain, *Intégration*, Hermann

[L] E. Lesigne, On the behavior at Infinity of an integrable function, American Math Monthly 117, February 2010.

[Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques, Cours d'Analyse*, Ellipses,1994.

[QZ] H. Queffelec, C. Zuily

[Roos] G. Roos,

[Ro] F. Rouvière,

[Ra] E. Ramis, *Exercices d'Analyse*, Masson.

[Ru] Rudin W., Analyse réelle et complexe, Masson, sixième tirage.

[V-P] J. Vauthier, J.-J. Prat, *Cours d'Analyse Mathématique de l'agrégation*, Masson, 2ème édition, 1994.