Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

Relations d'ordre. Dénombrement. Plus grand élément. Borne Supérieure.

1 Relations d'ordre.

1.1 Relations d'ordre. Ensembles ordonnés.

Définition. Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\mathscr{R}$. On dit que $\mathbb{R}$ est une *relation d'ordre* sur E ou que $(E,\mathscr{R})$ est un *ensemble ordonné* si et seulement si $\mathscr{R}$ possède les propriétés suivantes :

- *Réflexivité* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x$.
- *Anti-symétrie* : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$.
- *Transitivité* : $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Exemples.

- Dans l'ensemble des nombres réels, l'inégalité large $x \leq y$ est une relation d'ordre.
- Dans l'ensemble des nombres naturels, la relation a divise b, notée $a|b$ est une relation d'ordre.
- Dans l'ensemble des parties d'un ensemble, la relation $A \subset B$ est une relation d'ordre.

Remarques. Bien faire attention au fait que l'anti-symétrie n'est pas la négation de la symétrie. Il existe des relations qui sont à la fois symétriques et anti-symétriques.

D'une manière générale, les symboles pour désigner les relations d'ordre sont $\leq$, $\preceq$, $\ll$, ...

1.2 Majorants, minorants. Plus grand élément. Plus petit élément.

Définition. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

- On dit que $M \in E$ est *majorant* de A si et seulement si : $\forall x \in A$, $x \preceq M$.
- On dit que $m \in E$ est *minorant* de A si et seulement si : $\forall x \in A$, $m \preceq x$.

Exemples. Par exemple, si $(E, \preceq) = (\mathbb{R}, \leq)$ et si $A = [0,1[$, $B = \mathbb{Z}$, $C = [1,2]$, alors tout réel $x \geq 1$ est majorant de A, tout réel $x < 0$ est minorant de A, il n'y a ni minorant, ni majorant de B, tout réel $x > 2$ est majorant de C, tout réel $x < 1$ est minorant de C.

Si $(E, \preceq) = (\mathbb{N},|)$ et si $D = \{1,2,3,4,5,6\}$, les majorants de D sont tous les nombres divisibles par 1, 2, 3, 4, 5, 6, donc divisibles par PPCM$(2,3,4,5,6) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Définition. Avec les notations précédentes, on dit que A est *majorée* s'il existe au moins un majorant de A. De même, on dit que A est *minorée* s'il existe au moins un minorant de A.

Définition. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de A. Soit $a \in E$. On dit que :

- a est un *plus grand élément de* A si et seulement si a est majorant de A et $a \in A$.

- a est un *plus petit élément de* A si et seulement si a est minorant de A et $a \in A$.

Exemples. Pour reprendre les exemples précédents,

- A n'a pas de plus grand élément mais a un plus petit élément 0.

- B n'a ni plus grand élément, ni plus petit élément.

- C a pour plus petit élément 1 et pour plus grand élément 2.

- D n'a pas de plus grand élément mais a pour plus petit élément 1.

Théorème. *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de A. Si A possède un plus grand élément, celui-ci est unique. Il en est de même pour le plus petit élément.*

Preuve. En effet, soient a et a' deux plus grands éléments de A.

Comme $a \in A$ et que a' est majorant de A, on a $a \preceq a'$.

Comme $a' \in A$ et que a est majorant de A, on a $a' \preceq a$.

L'antisymétrie de $\preceq$ nous donne $a = a'$.

Définition. Si A un sous-ensemble de $(E, \preceq)$ possède un plus grand élément, celui-ci est unique et on le note $\max A$.

De même, si le plus petit élément existe, celui-ci est unique et on le note $\min A$.

Nous avons vu dans les exemples précéents que les parties de $\mathbb{R}$, qu'elles soient majorées ou non, non pas forcément de plus grand élément.

Par contre, et c'est un des axiomes de construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ ou de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, nous avons :

Axiomes. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

Comme application, nous pouvons construire la partie entière des réels.

Théorème et définition. Si x est un nombre réel, il existe un et un seul entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On le note $[x]$ ou $E(x)$. De plus $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $A = \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide (car il existe des entiers relatifs plus petits que x) et majoré (car il existe des entiers relatifs strictement plus grands que x). Donc A possède un plus grand élément, n.

On a $n \in A$, donc $n \leq x$.

Comme n est majorant de A, $n+1$ aussi. On ne peut avoir $n+1 \in A$. En effet, si c'était le cas, on aurait deux éléments n et $n+1$ qui seraient tous les deux dans A et qui seraient majorants de A. Ceci contredirait l'unicité du plus grand élément de A.

On a donc $n+1 \notin A$, ce qui implique que $n+1 > x$.

Ceci montre bien l'existence de la partie entière de x. Reste à voir l'unicité de celle-ci.

Supposons que $n' \in \mathbb{Z}$ soit tel que $n' \leq x < n'+1$. Nous allons montrer que nécessairement, $n' = n$.

Si $n' < n$, alors $n'+1 \leq n \leq x$, ce qui est impossible car $x < n'+1$.

De même, $n < n'$ est impossible. On a donc bien $n = n'$.

Théorème (Principe de récurrence). *Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que : $0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in A \Rightarrow (n+1) \in A$. Alors : $A = \mathbb{N}$.*

Preuve. Supposons que $B = \backslash A$ soit non vide. B possède un plus petit élément b. Comme $0 \in A$, on a donc $b > 0$. En particulier $b-1 \notin B$. On en déduit que $b-1 \in A$ et donc que $b = (b-1)+1 \in A$. C'est absurde.

1.3 Bornes supérieures, borne inférieures.

Définition. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

On dit que $a \in E$ est *borne supérieure* de A si et seulement si a est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A.

On dit que $a \in E$ est *borne inférieure* de A si et seulement si a est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A.

Il découle de l'unicité du plus grand élément et du plus petit élément d'un ensemble que les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, sont uniques.

On note la borne supérieure, $\sup A$, et la borne inférieure, $\inf A$.

Exemples. Pour reprendre les exemples précédents,

- $\sup A = 1$, $\inf A = 0$. - $\sup B$ et $\inf B$ n'existent pas - $\sup C = 2$ et $\inf C = 1$. - $\sup D = 60$ et $\inf D = 1$.

En général, si la borne supérieure d'un ensemble A existe, elle n'est pas le plus grand élément de A car elle n'a aucune raison d'appartenir à A (voir l'exemple de l'ensemble A ci-dessus).

Mais par contre, si un ensemble A admet un plus grand élément $a = \max A$, alors a est la borne supérieure de A. Ceci prouve que la notion de borne supérieure est une notion plus générale que la notion de plus grand élément.

Théorème. *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$. Si A admet un plus grand élement a, alors a est borne supérieure de A.*

Preuve. Pour montrer que a est égal à la borne supérieure de A, il faut montrer que a est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. Or a est majorant de A. Il reste donc à prouver que a est minorant de l'ensemble des majorants de A, c'est-à-dire que, pour tout majorant M de A, on a $a \leq M$. Or ceci est bien le cas car $a \in A$.

1.4 Cas de $\mathbb{R}$.

L'une des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ est la suivante :

Axiome. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Nous avons aussi le théorème suivant, très important, appelé "Théorème de passage à la borne supérieure" :

Théorème. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A$, $x \leq M$. Alors $\sup A$ existe et $\sup A \leq M$.*

Il y a bien entendu un énoncé tout à fait analogue pour la borne inférieure.

Preuve. La borne supérieure existe car A est non vide et majorée. Comme M est un majorant de A, on en déduit que $\sup A$ qui est le plus petit élément de l'ensemble des majorants vérifie $\sup A \leq M$.

Attention toutefois au faux théorème de passage à la borne supérieure. L'énoncé suivant : "$\forall x \in A$, $x < M$ implique $\sup A < M$" est un énoncé faux. Si par exemple $A = [0,1[$ et $M = 1$, on a : $\forall x \in A$, $x < 1$ et pourtant $\sup A = 1$. Il est donc très important dans le théorème de passage à la borne supérieure que les inégalités soient larges.

Enfin, nous avons le théorème de caractérisation de la borne supérieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant :

Théorème. *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors $s = \sup A$ si et seulement si,*

$$\forall x \in A, \qquad x \leq s$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists x \in A, \qquad x \geq s - \varepsilon.$$

Preuve. En effet, si $s = \sup A$, alors s vérifie la première propriété.

Pour la seconde, on remarque que, si $\varepsilon > 0$, comme $s - \varepsilon < s$ et que s est le plus petit des majorants, alors $s - \varepsilon$ n'est pas majorant de A. Et donc, il existe $x \in A$ tel que $x > s - \varepsilon$. Ceci prouve le deuxième point.

Réciproquement, si s vérifie les deux propriétés, montrons que $s = \sup A$.

Tout d'abord, il découle de la première propriété que s est majorant de A. Montrons que s est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A, c'est-à-dire que s est minorant de l'ensemble des majorants.

Soit M un majorant de A. Montrons que $s \leq M$. Si $M < s$, alors, pour $\varepsilon = \frac{s-M}{2} > 0$, on sait qu'il existe $x \in A$ tel que $x \geq s - \varepsilon$. On a alors $x \geq s - \frac{s-M}{2} = \frac{M+s}{2} > M$ car $M > s$. On a donc exhibé un élément x de A tel que $x > M$. Ceci contredit le fait que M soit un majorant de Am ce qui prouve bien que $s \leq M$, et que s est la borne supérieure de l'ensemble A.

2 Produit cartésien d'ensembles finis.

2.1 Ensembles $E \times F$ et F^p. $p-$uplets.

Rappel de choses vues dans le premier chapitre.

Définition. E et F sont deux ensembles finis non vides. Le *produit cartésien* de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ formés d'un élément x de E suivi d'un élément y de F.

Exemple. Si $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{1,2\}$, on a

$$E \times F = \{(a;1),(a;2),(b;1),(b;2),(c;1),(c;2)\}$$

Définition. Soit p un entier naturel non nul, $E_1, \ldots, E_p$ p ensembles finis non vides. Le *produit cartésien* de $E_1, E_2, \ldots, E_p$, noté $E_1 \times \cdots \times E_p$, est l'ensemble des $p-$*uplets* $(x_1; x_2; \cdots; x_p)$ formés d'un élément x_1 de E_1 suivi d'un élément x_2 de E_2, *etc* ...

Si $E_1, \ldots E_p$ sont tous égaux à E, on note $E \times \cdots \times E = E^p$.

Exemple. On lance simultanément trois dés discernables, par exemple rouge, vert et blanc ; et on note les numéros des faces.

Le résultat d'un tel lancer peut se noter à l'aide d'un triplet $(x; y; z)$ où x est le numéro du dé rouge, y celui du dé vert et z celui du dé blanc.

Si E désigne l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$, à chaque lancer des trois dés est associé un élément de E^3.

2.2 Cardinal d'un produit d'ensembles.

Théorème. *Si E et F sont deux ensembles finis, alors*

$$Card\ (E \times F) = (Card\ E) \cdot (Card\ F).$$

Plus généralement, si $E_1, \dots E_p$ sont p ensembles finis

$$Card\ (E_1 \times \cdots \times E_p) = (Card\ E_1) \cdot (Card\ E_2) \cdots (Card\ E_p).$$

Enfin, si E est un ensemble fini et p un entier naturel non nul,

$$(Card\ E^p) = (Card\ E)^p.$$

Exemple. Dans un jeu de bridge, il y a 52 cartes. Chacune de ces cartes peut être considérée comme un élément du produit cartésien $E \times F$, où E est l'ensemble des quatre couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle) et F celui des treize valeurs (as, 2, 3,..., 9, 10, valet, dame, roi). Notez que l'on a bien card $(E \times F) = 4 \times 13 = 52$.

3 Arrangements. Permutations.

3.1 Arrangements.

Définition. n et p sont des naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et E est un ensemble à n éléments. Un *arrangement* de p éléments de E est un $p-$uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Exercice. Ecrire tous les arrangements de trois éléments de $\{a,b,c,d\}$.

3.2 Nombre d'arrangements.

Dans le cas général, notons $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. Pour fabriquer un arrangement de p éléments de E, on a le choix entre n élements pour la première position. Ce choix étant fait, on peut alors mettre $n-1$ éléments possibles en deuxième position. En continuant comme cela jusqu'à la $p-$ième position, on peut alors y placer $n-p+1$ éléments possibles. Le nombre d'arrangements est donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$.

Théorème. *n et p sont des naturels tels que $1 \leq p \leq n$ et E est un ensemble à n éléments. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est*

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

3.3 Permutations.

Définition. n est un naturel non nul et E un ensemble à n éléments. Une *permutation* des éléments de E est un arrangement de n éléments de E.

Théorème. *Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$*

4 Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \leq n$).

4.1 Nombre de parties à p éléments. Combinaisons.

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et soit $1 \leq p \leq n$. Nous savons que le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi les n de E est A_n^p. Chaque partie à p éléments de E, par permutation de ses éléments, donne naissance à $p!$ des arrangements précédents. Le nombre de parties à p éléments est donc $\dfrac{A_n^p}{p!}$. Si $p = 0$, cela est encore vrai.

Théorème. *Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments avec $p \leq n$ est $\dfrac{A_n^p}{p!}$. On note ce nombre C_n^p, on a donc :*

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\ p!}.$$

Définition. Une partie à p éléments d'un ensemble E à n éléments ($p \leq n$) s'appelle une *combinaison* de p des n éléments de E.

4.2 Propriétés des C_n^p.

Pour tout entier naturel n, $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $C_n^1 = n$.

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$, soit $p \leq n$ et soit A une partie de E à p éléments. Choisir les p éléments de A dans E, c'est aussi choisir les $n-p$ éléments du complémentaire de A dans E. Il y a donc autant de parties à p éléments de E que de parties à $n-p$ éléments de E.

Théorème. *Pour tous naturels n et p tels que $p \leq n$ on a :*

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

Soit E un ensemble à $n \geq 1$ éléments et soit p tel que $1 \leq p \leq n-1$. Notons a l'un des éléments de E. Notons $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties de E à p éléments qui contiennent a et $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de E à p éléments qui ne contiennent pas a. Choisir une partie de $\mathscr{A}$ revient à choisir une partie à $p-1$ élements dans $E \setminus \{a\}$ à laquelle on rajoute $\{a\}$. Il y a donc C_{n-1}^{p-1} telles parties. Choisir une partie de $\mathscr{B}$ revient à choisir une partie à p éléments dans $E \setminus \{a\}$. Il y a donc C_{n-1}^p telles parties.

Théorème. *Pour tous naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$ on a :*

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Il découle de ce théorème, en faisant une récurrence sur n :

Formule du binôme de Newton. *Pour tous complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Preuve. Pour $n = 1$, on a $a + b = C_1^0 a^0 b^{1-0} + C_1^1 a^1 b^{1-1}$.

Supposons que la formule du binôme soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n &= a\left(C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^{n-n}\right)\\ &+b\left(C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^{n-n}\right)\\ &= C_n^0 a^1 b^n + C_n^1 a^2 b^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} a^n b^1 + C_n^n a^{n+1} b^{n-n}\\ &+C_n^0 a^0 b^{n+1} + C_n^1 a^1 b^n + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^2 + C_n^n a^n b^{n-n+1}.\end{aligned}$$

En regroupant les termes $a^k b^{n+1-k}$ pour $k = 0, \ldots, n+1$, on obtient que la dernière somme vaut

$$C_n^0 a^0 b^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) a^1 b^n + \cdots + (C_n^{n-1} + C_n^n) a^n b^1 + C_n^n a^{n+1} b^{n-n}.$$

Comme $C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ et que, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, la dernière somme vaut

$$\begin{aligned}&C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1-0} + C_{n+1}^1 a^1 b^{n+1-1} + \cdots + (C_{n+1}^n) a^n b^{n+1-n} + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Ceci clôt la preuve de la formule du binôme de Newton.

Corollaire. *Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est*

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$