Agrégation de Mathématiques — **2002-2003**
Université Aix-Marseille I — **CMI**

Problèmes

Problème 1. *Parties réversibles.* Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est réversible si et seulement si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.

1. Montrez qu'il n'existe pas d'ensemble réversible dénombrable.

2. Soit A une partie réversible.
- **a.** Montrer que $f(A) = \mathbb{R} \setminus A$.
- **b.** En déduire que A ne peut être ouverte.
- **c.** En déduire que A ne peut être fermée.

3. On se propose dans cette question de montrer qu'il n'existe pas de partie A réversible qui soit un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$.
- **a.** Soit $(H, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Soit $\alpha = \inf\{x \in H \mid x > 0\}$. Montrez que si $\alpha = 0$ alors H dense dans $\mathbb{R}$ et que si $\alpha > 0$ alors $H = \alpha\mathbb{Z}$.
- **b.** En déduire qu'un sous-groupe non dénombrable de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant qu'il existe un ensemble réversible A qui soit un sous-groupe additif. Soit $B = \mathbb{R} \setminus A$.
- **c.** Montrez que, si g est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $g(x) = f(x) + x$, alors $g(\mathbb{R}) \subset B$.
- **d.** Montrez que, si h est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $h(x) = f(x) - x$, alors $g(\mathbb{R}) \subset B$.
- **e.** Montrez que g et h sont constantes (On pourra montrer que $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ en utilisant 3.b)
- **f.** En déduire une contradiction.

4. On se propose dans cette question de montrer que, si f est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sans point fixe, il existe une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$. Soit donc f une telle application.
- **a.** Montrez que f est strictement monotone.
- **b.** Montrez qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$ ou bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$.

On note $f^0 = Id_{\mathbb{R}}$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ puis, pour $n \geq 2$, $f^{n+1} = f^n \circ f$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f^n(x)$ (si $n < 0$, on dira que $y = f^n(x)$ si et seulement si $f^{-n}(x) = y$)
- **c.** Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

  Soit $(C_i)_{i \in I}$ les classes d'équivalence pour $\mathbb{R}$. Pour chaque classe d'équivalence C_i avec $i \in I$, on choisit un et un seul représentant x_i. Posons alors $A = \{f^{2n}(x_i) \mid i \in I,\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{f^{2n+1}(x_i) \mid i \in I,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- **d.** Montrez que $B = f(A)$, $A = f(B)$, $A \cup B = \mathbb{R}$.
- **e.** Montrez en utilisant 4.a et 4.b que $A \cap B = \emptyset$. Conclure.

5. Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2n, 2n+1[$. Montrez que A est réversible.

Problème 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé **réel**. Soit f une forme linéaire sur E, c'est à dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $H = \ker f$

1. Montrez que, pour tout $a \in E \setminus H$, on a $H \oplus \mathbb{R}a = E$.

2. Montrez que f est continue si et seulement si son noyau H est fermé dans E (on montrera l'existence d'un $r > 0$ tel que, pour tout $x \in B(0, r)$, on ait $|f(x)| < 1$).

3. Montrez qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé E est soit fermé, soit dense dans E.

4. Soit H un hyperplan fermé d'un espace normé. Soit f une forme linéaire continue associée (pourquoi une ?). Montrer que, pour tout $a \in E$, on a :

$$d(a, H) = \frac{|f(a)|}{\|f\|}.$$

5. On se propose dans cette question de montrer qu'une forme linéaire f est continue si et seulement si le complémentaire de son noyau $E \setminus H$ n'est pas connexe.

a. Montrer que, si f est continue, $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs. En déduire qu'il n'est pas connexe.

Soit maintenant f une forme linéaire non continue. On se propose de montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs.

b. Montrer qu'il suffit pour cela de montrer que, pour tout $a \in E$ tel que $f(a) = 1$, il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to E\setminus H$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = -a$ (on montrera que $C_+ = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ et $C_- = \{x \in E \mid f(x) < 0\}$ sont connexes par arcs et que $E \setminus H = C_+ \cup C_-$).

c. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de E telle que

$$x_0 = a;\ \forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|x_{n+1}\| < \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On décompose x_n sur la somme directe $E = H \oplus \mathbb{R}a$:

$$x_n = h_n + \lambda_n a.$$

d. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = 1$.

On pose $\alpha = \|x_0\| > 0$ et définissons l'application φ de $]0, \alpha]$ dans E de la façon suivante :

$$\forall t \in [\|x_{n+1}\|, \|x_n\|], \quad \varphi(t) = \frac{(\|x_{n+1}\| - t)(x_n + h_n) + (t - \|x_n\|)(x_{n+1} + h_{n+1})}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|}.$$

(En fait, φ est l'application affine qui vaut $x_n + h_n$ en $\|x_n\|$ et $x_{n+1} + h_{n+1}$ en $\|x_{n+1}\|$.)

e. Montrer que φ est continue sur $]0, \alpha]$

f. Montrer que :

$$\forall t \in [\|x_{n+1}\|, \|x_n\|], \qquad \varphi(t) + a = \frac{(\|x_{n+1}\| - t)(2x_n) + (t - \|x_n\|)(2x_{n+1})}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|}.$$

g. En déduire que :

$$\forall t \in [\|x_{n+1}\|, \|x_n\|], \qquad \|\varphi(t) + a\| < 2t.$$

h. Montrer que, si on pose $\varphi(0) = -a$ alors φ est une application continue sur $[0, \alpha]$ telle que $\varphi(0) = -a$, $\varphi(\alpha) = a$ et $\forall t \in]0, \alpha]$, $f(\varphi(t)) = 1$.

i. En déduire l'existence de γ.

j. Montrer que f est continue si et seulement si le complémentaire de son noyau n'est pas connexe et que f est continue si et seulement si le complémentaire de son noyau n'est pas connexe par arcs.

Problème 3. : *Polynômes orthogonaux.* Soit E la partie de $C([0,1], \mathbb{R})$ formée des fonctions x pour lesquelles l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2(t)}{t}\, dt$ existe.

1. Montrer que $x \in E \Rightarrow x(0) = 0$. Montrer que toute fonction continue, nulle et dérivable à l'origine appartient à E. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C([0,1], \mathbb{R})$.

2. Montrer que E devient un espace préhilbertien si on pose

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 \frac{x(t)y(t)}{t} dt.$$

3. Montrer que le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt s'applique à la suite $a_n : t \mapsto t^n$, n entier ≥ 1 et fournit des polynômes $P_n, n \geq 1$. Expliciter P_1, P_2, P_3.

4. Soit F le sous-espace de E formé des fonctions x qui sont nulles sur un intervalle $[0, a]$, $a \neq 0$. Montrer que F est dense dans E.

5. En déduire que la suite (P_n) est totale dans E.

Problème 4. : *Base hilbertienne de $L^2([-1,1], dx)$. Polynômes de Legendre.* D^n désigne l'opérateur de dérivation d'ordre n. Les polynômes ($n \geq 0$)

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n((x^2-1)^n)$$

sont appelés *polynômes de Legendre.*

1. a. Soit $m > n$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 D^m((x^2-1)^m) D^n((x^2-1)^n)\, dx = -\int_{-1}^1 D^{m-1}((x^2-1)^m) D^{n+1}((x^2-1)^n)\, dx.$$

En déduire que les polynômes L_n sont deux à deux orthogonaux.

b. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \left[D^n((x^2-1)^n)\right]^2 dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^n\, dx.$$

En déduire que $\|L_n\|_2^2 = \frac{2}{2n+1}$, donc que les polynômes $P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n$ forment une suite orthonormale de l'espace préhilbertien $E = C([-1,1], \|\cdot\|_2)$.

2. Démontrer, grâce au théorème de Weierstraß, que la suite $(P_n)_n$ est totale dans E.

3. Montrer que les $(P_n)_n$ forment une base hilbertienne.
4. On pourra constater que les polynômes obtenus à partir de la suite des monômes x^n par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sont les polynômes de Legendre.

Problème 5. : On considère un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, une application continue $\omega : [a,b] \to]0,+\infty[$ et un entier $\ell \geq 0$.

1. Pour toutes fonctions continues f et g définies sur $[a,b]$ et à valeurs réelles, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt \quad \text{et} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

(a) Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur l'espace $C([a,b])$ et que l'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur cet espace.
(b) Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes unitaires (c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1), vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$, $\{P_0, \ldots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et telle que les polynômes P_n soient deux à deux orthogonaux (pour le produit scalaire défini du (a)).
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer que le polynôme P_n admet exactement n racines distinctes dans l'intervalle $]a,b[$
(i) Montrer que P_n a, au moins, une racine de multiplicité impaire appartenant à $]a,b[$.
(ii) Soit $\{x_1, ..., x_k\}$ l'ensemble des racines de P_n dans $]a,b[$ de multiplicité impaire. Montrer qu'on peut écrire, pour tout $x \in [a,b]$

$$P(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)Q(x)$$

où Q est un polynôme de signe constant sur $[a,b]$.
(iii) On suppose $k < n$. Montrer que

$$\int_a^b \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^2 Q(x)\omega(x)dx = 0.$$

(iv) Conclure.
(d) Soit $f \in C([a,b])$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|f - Q_n\| = \inf_{R \in Q_n} \|f - R\|.$$

2. On note $x_0 < \ldots < x_\ell$ les racines du polynôme $P_{\ell+1}$ dans l'intervalle $]a,b[$.
(a) Montrer que, pour tout $0 \leq i \leq \ell$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_\ell[X]$ tel que, pour tout $0 \leq j \leq \ell$, on ait :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq i \\ 1 & \text{si} \quad j = i \end{cases}$$

Vérifier alors que $\{L_0, \ldots, L_\ell\}$ est une base de $\mathbb{R}_\ell[X]$.

Pour tout $0 \leq i \leq \ell$, on pose :

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(t)\omega(t)dt$$

(b) Montrer que si $f \in \mathbb{R}_\ell[X]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(x_i)$$

(c) Supposons que $f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$.

(i) Justifier qu'il existe alors $q, r \in \mathbb{R}_\ell[X]$ tels que $f = qP_{\ell+1} + r$.

(ii) Déterminer :

$$\int_a^b q(x)P_{\ell+1}(x)\omega(x)dx$$

(iii) Montrer que, pour tout $0 \leq j \leq \ell$, $f(x_j) = r(x_j)$.

(iv) En déduire que :

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(x_i)$$

3. On suppose que $y_0 < \ldots < y_\ell \in]a, b[$ et $\mu_0, \ldots, \mu_\ell \in \mathbb{R}$ sont tels que, pour tout $f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$, on ait :

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt = \sum_{i=0}^{\ell} \mu_i f(y_i)$$

On pose alors:

$$\pi_{\ell+1}(X) = \prod_{j=0}^{\ell}(X - y_j)$$

(a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_\ell[X]$, on a :

$$\int_a^b P(t)\pi_{\ell+1}(t)\omega(t)dt = 0$$

(b) En déduire que, pour tout $0 \leq j \leq \ell$, on a $y_j = x_j$.

(c) En utilisant les polynômes L_i, montrer que pour tout $0 \leq j \leq \ell$, on a $\mu_j = \lambda_j$.

4. On admet que pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^{2\ell+2}$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :

$$\left| \int_a^b f(t)\omega(t)dt - \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(x_i) \right| = \frac{f^{2\ell+2}(\xi)}{(2\ell+2)!} \int_a^b P_\ell^2(t)\omega(t)dt$$

Montrer que dans le cas où $f(t) = t^{2\ell+2}$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\omega(t)dt - \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(x_i) \right| \neq 0$$

Problème 6. : *Problème sur les espaces de Sobolev, autour des opérateurs elliptiques et du théorème de Lax-Milgram.*

Rappels sur les distributions. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

- Si f est une fonctions définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, on appelle support de f et on note supp f l'ensemble $\overline{\{x \in \Omega\ ,\ f(x) \neq 0\}}$.
- $\mathcal{D}_K(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact K dans Ω
- $\mathcal{D}(\Omega) = \displaystyle\bigcup_{K \text{ compacts de } \Omega} D_K(\Omega).$
- On dit que T est une distribution sur Ω si et seulement si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\forall K \text{ compact de } \Omega, \quad \exists C_K > 0, \quad \exists N_K, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |T(\varphi)| = |\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq N_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

(on rappelle les notations suivantes : pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}).$$

- Si de plus, on peut trouver un entier N majorant tous les N_K dans l'inégalité précédente, alors on dit que T est d'ordre inférieur ou égal à N.
- On appelle distribution de Dirac en point $a \in \Omega$ la distribution notée δ_a qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a).$$

On vérifie que c'est une distribution d'ordre 0.
- Si f est une fonction localement intégrable, alors elle définit une distribution que l'on notera toujours f et qui est définie de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi.$$

Cette indentification est bien injective, c'est à dire que deux fonctions f et g définissent la même distribution ssi elles sont égales presque partout. De plus elle n'est pas surjective. En effet, il n'existe pas de fonction localement intégrable f telle que $\delta_0 = f$ au sens des distributions (par exemple).
- Toute distribution T est différentiable de la manière suivante : on définit pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha T$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle.$$

Cette définition est motivé par le fait que, si T est la distribution associée à une fonction f de classe C^∞, alors $\partial^\alpha T$ sera la distribution associée à la fonction $\partial^\alpha f$ (intégration par parties, via la formule de Stokes).

Partie I: L'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction u définie sur $\mathbb{R}^N$ appartient à l'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ (encore noté $W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ ou, dans la suite de ce problème, H^m) si, et seulement si, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et toutes les dérivées de u d'ordre inférieur ou égal à m au sens des distributions appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^N)$.

(a) (i) Montrer que l'application de $H^m \times H^m$ dans $\mathbb{C}$ qui, à (u, v) fait correspondre

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} dx$$

définit un produit scalaire sur H^m. On notera $\|.\|_{H^m}$ la norme associée.

(ii) Vérifier que, muni de ce produit scalaire, H^m est un espace de Hilbert. Pour cela, on utilisera le fait que $L^2(\mathbb{R}^N)$ est complet, et on remarquera que la convergence L^2 implique la convergence au sens des distributions.

(b) On cherche à montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans H^m.

(i) Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in H^m$. Montrer que $\rho * u \in H^m$ et que, pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq m$,

$$\partial^\alpha(\rho * u) = \rho * \partial^\alpha u.$$

Indication: le voir d'abord quand ρ est continue à support compact, puis utiliser une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers ρ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Soient $u \in H^m$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \|u - u * \rho_n\|_{H^m} = 0.$$

En déduire qu'il existe une fonction $v \in H^m \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|u - v\|_{H^m} \leq \varepsilon/2$.

(iii) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ valant 1 sur la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $R > 0$, on définit

$$v_R(x) = v(x)\psi\left(\frac{x}{R}\right).$$

En calculant $\partial^\alpha(v_R - v)$ pour tout α vérifiant $|\alpha| \leq m$ à l'aide de la règle de Leibniz, montrer que, pour R assez grand, $\|v - v_R\|_{H^m} \leq \varepsilon/2$ (on utilisera notamment le théorème de convergence dominée). Conclure.

Partie II: L'espace $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ (ou H^{-m}) l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telles qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ |T(\phi)| \leq C \|\phi\|_{H^m}.$$

(a) Soit $T \in H^{-m}$. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ par $\phi \mapsto T(\phi)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur H^m. On utilisera la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans H^m.

(b) Soit maintenant L une forme linéaire continue sur H^m.

(i) Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Montrer qu'il existe $C'_K > 0$ tel que, pour toute $\phi \in \mathcal{D}_K$,

$$|L(\phi)| \leq C'_K \sup_{x\in K,\ |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

(ii) En déduire que la restriction de L à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à m, puis que $L \in H^{-m}$. On veut prouver qu'une distribution T appartient à H^{-m} si, et seulement si T est une somme de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

(c) Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $|\alpha| \leq m$. Montrer que $\partial^\alpha u \in H^{-m}$.

(d) Soit maintenant $T \in H^{-m}$.

(i) On pose
$$A = \{\alpha \in \mathbb{N}^n;\ |\alpha| \leq m\}$$
et
$$\left(L^2\right)^A = \left\{(u_\alpha)_{\alpha\in A};\ \forall \alpha \in A,\ u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}.$$
Vérifier rapridement que $\left(L^2\right)^A$ est un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire
$$\langle U\,|V\,\rangle = \sum_{\alpha\in A}\int_{\mathbb{R}^N} u_\alpha(x)\overline{v_\alpha(x)}dx.$$

(ii) Soit D l'application de H^m dans $\left(L^2\right)^A$ qui à u associe $Du = \left(\partial^\alpha u\right)_{\alpha\in A}$. Vérifier que D est une isométrie de H^m sur un sous-espace fermé F de $\left(L^2\right)^A$.

On note P la projection orthogonale de $\left(L^2\right)^A$ sur F. Pour tout $W \in \left(L^2\right)^A$, on pose
$$L(W) = T\left(D^{-1} \circ P(W)\right).$$
Montrer que L est continue sur $\left(L^2\right)^A$ et en déduire qu'il existe $V \in \left(L^2\right)^A$ tel que, pour tout $W \in \left(L^2\right)^A$,
$$L(W) = \langle W\,|V\,\rangle.$$

(iii) En déduire qu'il existe $(v_\alpha)_{\alpha\in A} \in \left(L^2\right)^A$ tel que, pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,
$$T(\phi) = \sum_{\alpha\in A}\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha\phi(x)\overline{v_\alpha(x)}dx.$$

(iv) Conclure.

Partie III: le théorème de Lax-Milgram

On note H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, B une application bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :
a) il existe un réel $c > 0$ tel que pour chaque $x, y \in H$ on a $|B(x,y)| \leq c\|x\|\,\|y\|$;
b) il existe un réel $a > 0$ tel que pour chaque $x \in H$ on a $B(x,x) \geq a\|x\|^2$.

(a) Montrer que pour chaque élément $y \in H$ il existe un élément $z \in H$, unique, tel que pour chaque $x \in H$ on a $\langle x, z\rangle = B(x,y)$. Dorénavant z sera noté $T(y)$.
(b) Montrer que T est une application linéaire continue de H dans lui-même de norme $\leq c$.
(c) Montrer que T est injective.
(d) Soit $z \in T(H)$ et $y \in H$ tel que $z = T(y)$. Démontrer que $\|y\| \leq \dfrac{1}{a}\|z\|$.
(e) Montrer que $T(H)$ est fermé dans H. [On pourra utiliser la question précédente]
(f) Montrer que $T(H) = H$. [On pourra tout d'abord montrer que $(T(H))^\perp = \{0\}$]
(g) Démontrer qu'il existe un homéomorphisme linéaire S de H dans lui-même tel que $\|S\| \leq \dfrac{1}{a}$, $\|S^{-1}\| \leq c$ tel que pour chaque $x, y \in H$ on a $\langle x, y\rangle = B(x, S(y))$.
(h) Soit f une forme linéaire continue sur H.

(1) Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in H$ tel que $\|v\| \leq \frac{1}{a}\|f\|$ et que, pour chaque $x \in H$ on a, $f(x) = B(x, v)$.

(2) On suppose de plus dans cette question que la forme bilinéaire B est symétrique. On note J l'application de H dans $\mathbb{R}$ définie par $J(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - f(x)$. Montrer que, pour chaque vecteur $x \in H$, on a $J(v) \leq J(x)$. [Ecrire $x = v + h$ et développer $J(x)$] Montrer que v est le seul vecteur de H possédant cette propriété.

Partie IV: Application à une EDP

Dans cette partie, toutes les fonctions et distributions sont à valeurs rélles.

Soient $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ des fonctions de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{C}^N$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j} \geq c\,|\xi|^2 .$$

(a) Vérifier que, si $u \in H^1$ et si

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u),$$

alors $A(u) \in H^{-1}$. On veut prouver le résultat suivant: pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in H^{-1}$, il existe un unique $u \in H^1$ tel que

$$A(u) - \lambda u = f.$$

(b) Montrer que l'expression

$$\langle u, v\rangle_* = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} a_{ij}(x)\partial_i u(x)\overline{\partial_j v(x)}dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\overline{v(x)}dx$$

est un produit scalaire sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ et qu'il définit une norme sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$.

(c) Déduire de la question précédente que, si $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, alors il existe un unique $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout $v \in H^1$, $f(v) = \langle u_0, v\rangle_*$.

(c) Soit $f \in H^{-1}$. Pour tout $u \in H^1$, on pose

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j u(x)dx + \frac{1}{2}\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)dx - f(u).$$

Montrer que J atteint son minimum en un point unique $w \in H^1$, et que, pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_i\phi(x)\partial_j w(x)dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x)w(x)dx.$$

En déduire que, si $u = -w$, on a $A(u) - \lambda u = f$.

(*d*) Montrer de plus que u est le seul élément de H^1 vérifiant $A(u) - \lambda u = f$.

<u>Problème 7.</u> : *Problème sur le théorème de Malgrange-Ehrenpreis.*

Le but de ce problème est de donner une preuve du théorème de Malgrange-Ehrenpreis démontrant l'existence d'une solution élémentaire pour tout opérateur aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Afin de simplifier (un petit peu) la preuve, on se placera ici dans le cadre réel, c'est-à-dire que les opérateurs, les fonctions et les espaces de Hilbert considérés seront toujours réels. Néanmoins, la preuve du théorème de Malgrange-Ehrenpreis dans le cadre complexe est tout à fait analogue.

Soit donc

$$P(D) = \sum a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$$

un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, où seul un nombre fini des a_J sont des réels non nuls et où

$$J = (j_1, \ldots, j_n), \quad |J| = j_1 + \cdots + j_n \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J} = \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}.$$

On dira que P est d'ordre m si et seulement si le polynôme

$$P = \sum a_J X^J = \sum a_J X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$$

est de degré m, soit encore si et seulement si $a_J = 0$ pour $|J| \geq m + 1$.

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω et à valeurs réelles. $L^2(\Omega)$ désigne l'espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables à valeurs réelles et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dans Ω. Les normes et produits scalaires dans $L^2(\Omega)$ seront notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ (et parfois $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ et $\| \cdot \|_\Omega$ quand il y a ambiguïté) : pour $u, v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv \, d\lambda \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \int_\Omega u^2 \, d\lambda$$

où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Quand u est un élément de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (*resp.* $L^2(\Omega)$) et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (*resp.* $\mathcal{D}(\Omega)$), on notera aussi

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \, d\lambda \qquad \left(\textit{resp. } \langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi \, d\lambda \right).$$

On se propose de montrer qu'il existe une distribution T sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$P(D)T = \delta_0$$

où δ_0 désigne la masse de Dirac en 0. Pour cela, la démarche sera la suivante : dans la partie I, on utilise une inégalité de Hörmander (prouvée en Annexe) pour prouver que, si $g \in L^2(\Omega)$ où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ alors il existe $u \in L^2(\Omega)$ tel que

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions. Dans la partie II, on utilise une version pondérée du théorème de Hörmander pour montrer que, si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et si supp $g \subset \Omega$ ouvert convexe, alors toute solution de $P(D)u = g$ donnée par la partie I vérifie supp $u \subset \Omega$. Dans la partie III, on utilise un procédé de "recollement" pour montrer que pour tout $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, il existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$P(D)u = g.$$

Enfin, l'inégalité de Hörmander est prouvée en Annexe.

Questions préliminaires

1. Soit $P(D) = \sum a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}$ et $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Montrez que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \langle u, P^*(D)\varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$$

où
$$P^*(D) = \sum (-1)^{|J|} a_J \frac{\partial^{|J|}}{\partial x^J}.$$

2. Soit H définie sur $\mathbb{R}^n$ par $H(x_1, \ldots, x_n) = 1$ si tous les x_i sont positifs et 0 sinon. Montrez que

$$\frac{\partial^n H}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = \delta_0.$$

3. Montrez que, si pour tout $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, il existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que $P(D)u = g$ au sens des distributions, alors il existe une distribution E telle que $P(D)E = \delta_0$.

ON ADMET LES RÉSULTATS SUIVANTS (Inégalité de Hörmander) : Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C_P > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)\varphi\| \geq C_P \|\varphi\| \tag{1}$$

et on peut prendre

$$C_P = C(P, \Omega) = \frac{1}{2^m m! A^m} \max_{|J|=m}(|a_J| J!) \tag{1'}$$

où $J! = j_1! \ldots j_n!$ et $A = \sup_{x \in \Omega} |x|$ ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$). Ces résultats sont prouvés en annexe.

Partie I : Résolution de $P(D)u = g$ dans $L^2(\Omega)$.

On se propose de montrer que, si Ω est borné dans $\mathbb{R}^n$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors il existe $u \in L^2(\Omega)$ solution de

$$P(D)u = g$$

au sens des distributions avec $\|u\| \leq \|g\|/C_P$, où $C_P = C(P,\Omega) > 0$ est la constante introduite précédemment.

1. Montrez que $$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P^*(D)\varphi\| \geq C_P\|\varphi\|.$$

2. Soit $E = \{\psi = P^*(D)\varphi \;/\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$. En utilisant la question précédente, montrez que l'application $E \ni \psi \mapsto \langle g, \varphi\rangle$ est bien définie et que c'est une forme linéaire continue pour la norme L^2.

3. Montrez qu'il existe $u \in \overline{E}$ (adhérence de E pour la norme L^2) tel que

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle g, \varphi\rangle = \langle u, P^*(D)\varphi\rangle.$$

4. Conclure.

Partie II : Inégalité de Hörmander pondérée. Support de la solution.

1. Soient $P(D)$ et Ω comme précédemment. En appliquant l'inégalité de Hörmander (1) à

$$\psi = e^{\frac{\eta}{2}x_1}\varphi$$

et $$Q_\eta(D)\psi = e^{\frac{\eta}{2}x_1}P(D)[e^{-\frac{\eta}{2}x_1}\psi],$$

(justifiez au passage que c'est bien un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants),

montrez que : $$\forall\eta \in \mathbb{R} \qquad \int_\Omega e^{\eta x_1}|P(D)\varphi|^2 d\lambda \geq C_{Q_\eta}^2 \int_\Omega e^{\eta x_1}|\varphi|^2 d\lambda.$$

2. Montrez que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $C_{Q_\eta} = C_P$.

3. En faisant tendre η vers $+\infty$, montrez que, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $P(D)\varphi = 0$ dans le demi-espace $\{x_1 > 0\}$, alors $\varphi = 0$ dans ce demi-espace.

4. Montrez que, si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est tel que $P(D)\varphi = 0$ en dehors de Ω, alors $\varphi = 0$ en dehors de Ω (on pourra utiliser le fait que l'image d'un opérateur aux dérivées partielles par une transformation affine est encore un opérateur aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants, et utiliser la version géométrique d'Hahn-Banach).

5. Soit $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que $P(D)\varphi = 0$ en dehors de Ω (toujours au sens des distributions). Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que Supp $\chi \subset B_1$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et tel que $\int_{\mathbb{R}^n} \chi d\lambda = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\varphi_\varepsilon = \varphi * \chi_\varepsilon$ avec $\chi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^n}\chi(\frac{t}{\varepsilon})$.
a. Montrez que $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
b. Montrez que $P(D)\varphi_\varepsilon$ est nul en dehors de $\Omega_{2\varepsilon} = \Omega + 2\varepsilon B_1$, puis que $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
c. Montrez que $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ dans $L^2(K)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$.

d. Montrez que $\varphi = 0$ en dehors de Ω.

Partie III : Résolution de $P(D)u = g$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\rho > 0$, on note B_ρ la boule ouverte de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question, on se propose de montrer que, si $0 < r < r' < R$ et si $v \in L^2(B_{r'})$ vérifie $P(D)v = 0$ dans $B_{r'}$, il existe une suite $(v_j)_j$ dans $L^2(B_R)$ telle que $P(D)v_j = 0$ dans B_R et telle que v_j tend vers v dans $L^2(B_r)$.

a. Montrez que, quitte à prendre un r' un peu plus petit, on peut supposer que v est de classe C^∞ et vérifie $P(D)v = 0$ dans $B_{r'}$.

b. Montrez que, pour obtenir l'existence de la suite $(v_j)_j$, il suffit de prouver le résultat suivant :
Si $g \in L^2(B_r)$ est tel que $\langle \alpha, g\rangle_{B_r} = 0$ quel que soit $\alpha \in L^2(B_R)$ tel que $P(D)\alpha = 0$ dans B_R ; alors $\langle v, g\rangle_{B_r} = 0$.

Soit donc $g \in L^2(B_r)$ tel que $\langle \alpha, g\rangle_{B_r} = 0$ quel que soit $\alpha \in L^2(B_R)$ tel que $P(D)\alpha = 0$ dans B_R. Le but des questions c,d,e,f et g est de montrer qu'on a effectivement $\langle v, g\rangle_{B_r} = 0$.

c. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

i. Montrez que, si $P(D)\varphi = 0$ alors $\langle \varphi, g\rangle_{B_r} = 0$.

ii. Si $P(D)\varphi \neq 0$, montrez qu'il existe $\psi \in L^2(B_R)$ tel que $P(D)\psi = P(D)\varphi$ dans B_R et tel que $\|\psi\|_{B_R} \leq \|P(D)\varphi\|_{B_R}/C_P$, C_P étant la constante introduite dans la partie I.

iii. En déduire qu'il existe $C > 0$ ne dépendant que de g et de P et indépendant de φ tel que

$$|\langle \varphi, g\rangle_{B_r}| \leq C\|P(D)\varphi\|_{B_R}.$$

d. Montrez qu'il existe $w \in L^2(B_R)$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \langle \varphi, g\rangle_{B_r} = \langle P(D)\varphi, w\rangle_{B_R}$$

e. Soit $\widetilde{g} = \begin{cases} g & \text{sur } B_r \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus B_r \end{cases}$ et $\widetilde{w} = \begin{cases} w & \text{sur } B_R \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus B_R \end{cases}$. Montrez que $\widetilde{g} = P^*(D)\widetilde{w}$.

f. Montrez que $w = 0$ sur $B_R \setminus B_r$.

g. Montrez qu'il existe $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\widetilde{v}_{|B_r} = v$ et $P(D)\widetilde{v} = 0$ sur B_r. Montrez que $\langle v, g\rangle_{B_r} = 0$. Conclure.

2. On se propose de montrer dans cette question que

$$\forall g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \exists u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{tel que} \qquad P(D)u = g$$

On note comme précédemment B_N la boule de centre 0 et de rayon N. Soit $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

a. Montrez qu'il existe $u_1 \in L^2(B_2)$ tel que $P(D)u_1 = g$ sur B_2.

b. Supposons construit $u_N \in L^2(B_{N+1})$ tel que $P(D)u_N = g$ sur B_{N+1}. Soit $w \in L^2(B_{N+2})$ tel que $P(D)w = g$ sur B_{N+2}. Montrez qu'il existe $v \in L^2(B_{N+2})$

tel que $P(D)v = 0$ sur B_{N+2} et $\|v - (u_N - w)\|_{B_N} \leq \frac{1}{2^N}$ (on utilisera le résultat de la question 1 de la partie III). On pose alors $u_{N+1} = v + w$.

c. Montrez que $P(D)u_{N+1} = g$ dans B_{N+2} et que $\|u_{N+1} - u_N\|_{B_N} \leq \frac{1}{2^N}$.

d. Montrez que (u_N) converge vers un u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ au sens des distributions et que $P(D)u = g$.

Annexe : Inégalité de Hörmander.

Soit $P(D)$ un opérateur linéaire à coefficients constants d'ordre m. On se propose de montrer que, si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C_P > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)\varphi\| \geq C_P \|\varphi\| \tag{1}$$

1. Supposons $n = 1$, $\Omega =]0, 1[$ et $P(D) = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Montrez que, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle (x\varphi)', \varphi\rangle = \langle x\varphi', \varphi\rangle + \langle \varphi, \varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi, \varphi\rangle = -\langle x\varphi', \varphi\rangle - \langle x\varphi, \varphi'\rangle.$$

En déduire que $\|\varphi\|^2 \leq 2\|\varphi'\|\|\varphi\|$, puis (1) dans ce cas particulier.

2. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on définit $P_j(D)$ par

$$P_j(D)\varphi = P(D)(x_j\varphi) - x_j P(D)\varphi. \tag{2}$$

Montrez que $P_j(D)$ est soit nul, soit d'ordre inférieur ou égal à $m - 1$.

3. Soit $A = \sup_{x\in\Omega} |x|$ ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$). On se propose de montrer par récurrence sur $m \geq 0$ la propriété $\mathcal{P}(m)$ suivante :

$\mathcal{P}(m) =$“ Pour tout opérateur $P(D)$ linéaire à coefficients constants d'ordre inférieur ou égal à m, si $P_j(D)$ désigne l'opérateur défini par (2), alors on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|P(D)\varphi\|\text{”} \tag{3}$$

a. Montrez que $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour $m = 0$.

b. Montrez que, si $\mathcal{P}(m)$ est vraie, alors, pour tout opérateur $P(D)$ d'ordre inférieur ou égal à m, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)(x_j\varphi)\| \leq (2m + 1)A\|P(D)\varphi\|$$

c. Montrez que $\qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)\varphi\|^2 = \|P^*(D)\varphi\|^2.$

d. Soit $m \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}(m - 1)$ est vraie. Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre m.

i. Montrez que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle = \langle x_j P(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle + \|P_j(D)\varphi\|^2$$

ii. Montrez que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle$

iii. Montrez que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \|P_j(D)\varphi\|^2 = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle - \langle x_j P(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle.$$

iv. En utilisant 3.b, 3.c et l'hypothèse de récurrence, montrez que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P_j^*(D)(x_j\varphi)\| \leq (2m-1)A\|P_j(D)\varphi\|$$

v. Montrez que$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad |\langle x_j P(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle| \leq A\|P(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\|,$

puis que $\|P_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|P(D)\varphi\|$. Conclure.

4. Montrez que (1) est vérifiée (on raisonnera par récurrence sur l'ordre de P).

5. Montrez que, dans (1), on peut prendre

$$C = C(P,\Omega) = \frac{1}{2^m m! A^m} \max_{|J|=m}(|a_J|J!)$$

où $J! = j_1! \dots j_n!$

Question subsidiaire.

Montrez que tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants complexes a une solution élémentaire.

Problème 8. *Le problème comporte trois parties ; la partie II s'appuie sur un résultat qui sera démontré dans la partie III.*

PARTIE I

Notations.

ℓ^2 est l'espace de Hilbert des suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de complexes telles que $\sum_0^\infty |a_n|^2 < +\infty$; il est muni de sa norme hilbertienne usuelle : $\|a\| = \left(\sum_0^\infty |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers ≥ 1 ; si A est une partie finie de $\mathbb{N}^*$, $|A|$ désigne le cardinal de A.

Si $a, b \in \ell^2$, $a*b = c$ (convolée des suites a et b) est par définition la suite $c = (c_n)_{n\geq 0}$ où :

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0}} a_i b_j.$$

Pour $E \subset \mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_N(E) = |E \cap [N, 2N]|$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et $\lambda(E) = \sup_{N\in\mathbb{N}}[\lambda_N(E)] \leq +\infty$.

E est dit lacunaire si $\lambda(E) < +\infty$ (propriété arithmétique de E).
E est dit régulier si $a, b \in \ell^2 \Longrightarrow (a * b)1_E \in \ell^2$ (propriété analytique de E).
(Si $a * b = c$, $d = c1_E$ est par définition la suite (d_n) avec $d_n = c_n$ si $n \in E$, 0 sinon.)

1. Donner un exemple de $a, b \in \ell^2$ telles que $a * b \notin \ell^2$.
(*Indication :* on pourra prendre $a_n = b_n = (n+1)^{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$ convenable.)

2. On suppose E régulier et on fixe $b \in \ell^2$.

- **a.** Montrer que L_b, définie par $L_b(a) = (a * b)1_E$, est une application linéaire continue de ℓ^2 dans ℓ^2. (*Indication :* soit (a^i) une suite de ℓ^2 ; montrer que les deux hypothèses $a^i \to a$ et $L_b(a^i) \to a'$ (où a, a' sont des éléments donnés de ℓ^2) entraînent la conclusion $a' = L_b(a)$.)
- **b.** Montrer que $L_b(a) = L_a(b)$, $\forall a, b \in \ell^2$ et en déduire que $\sup_{\|b\|\leq 1} \|L_b(a)\| < \infty$, $\forall a \in \ell^2$.
- **c.** En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une constante $M < \infty$ telle que :

$$\forall a, b \in \ell^2, \qquad \|(a * b)1_E\| \leq M\|a\|\|b\|.$$

La meilleure constante M possible sera notée $M(E)$.

3. Soit E un ensemble régulier ; montrer que E est lacunaire et que plus précisément :

$$\lambda(E) \leq 4(M(E))^2.$$

(*Indication :* pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, considérer a et b définies par $a = b$, $a_n = 1$ si $0 \leq n \leq 2N$, $a_n = 0$ sinon.)

4. Soit E un ensemble lacunaire, a et $b \in \ell^2$ avec $\|a\| = \|b\| = 1$, $c = a * b$.

- **a.** Montrer que $c_n = \sum_{\frac{n}{2} < i \leq n} a_i b_{n-i} + \sum_{\frac{n}{2} \leq i \leq n} b_i a_{n-i}$.
- **b.** Montrer que $|c_n|^2 \leq 2 \left[\sum_{\frac{n}{2} < i \leq n} |a_i|^2 + \sum_{\frac{n}{2} \leq i \leq n} |b_i|^2 \right]$.
- **c.** Montrer que E est régulier et que plus précisément $M(E) \leq C\sqrt{\lambda(E)}$ où C est une constante numérique dont on indiquera une valeur possible.

Ainsi, E régulier $\Longleftrightarrow$ E lacunaire.

5. Un ensemble $F = \{\lambda_j\}_{j\geq 1} \subset \mathbb{N}^*$, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_j < \lambda_{j+1} < \ldots$ est dit un ensemble de Hadamard si $\lambda_{j+1} \geq 2\lambda_j$, $\forall j \geq 1$. Pour $E \subset \mathbb{N}^*$, montrer l'équivalence des propriétés :

i. E est lacunaire ;

ii. E est réunion finie d'ensembles de Hadamard.

6. Soit $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ l'ensemble des termes de la suite de Fibonacci définie par $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ si $n \geq 1$. Montrer que E est lacunaire et calculer $\lambda(E)$.

PARTIE II

Notations : L^1 est l'ensemble des classes de fonctions complexes localement intégrables, $2\pi-$périodiques muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt.$$

Pour $f \in L^1$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$

On définit de façon analogue L^2, muni de la norme $\|f\|_2 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt.\right)^{\frac{1}{2}}.$

On définit aussi, pour j=1,2 : $H^j = \{f \in L^j\ ;\ \widehat{f}(n) = 0,\ \forall n < 0\}$.

On admet aussi dans cette partie le résultat fondamental suivant :

$$\forall f \in H^1, \qquad \exists g \text{ et } h \in H^2 \quad \text{telles que} \quad f = gh \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \|g\|_2\|h\|_2. \qquad (*)$$

1. Montrer que $\forall g \in H^2$, $\exists G \in H^2$ telle que :

a. $\widehat{G}(n) = |\widehat{g}(n)|$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

b. $\|G\|_2 = \|g\|_2$.

2. Soit $f \in H^1$; montrer qu'il existe $F \in H^1$ telle que :

a. $|\widehat{f}(n)| \leq \widehat{F}(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

b. $\|F\|_1 \leq \|f\|_1$.

[*Indication* : utiliser $(*)$.]

3. Soit a l'élément de L^1 défini par $a(t) = i(\pi - t)$ si $0 \leq t < 2\pi$.

Montrer que $n \in \mathbb{N}^* \implies \widehat{a}(n) = \dfrac{1}{n}$.

4. Soient f, F comme dans la question 2.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\widehat{F}(n)}{n} \leq \pi\|F\|_1$.

b. Montrer que $\sum_{1}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{n} \leq \pi \|f\|_1$.

5. Soit $E \subset \mathbb{N}^*$ un ensemble lacunaire et soit $f \in H^1$. Montrer que $\left(\sum_{n \in E} |\widehat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{\lambda(E)}\|f\|_1$, où C est comme dans I.4.c.

6. On rappelle les propriétés du noyau de Féjer k_N ($N \in \mathbb{N}^*$) :

$$k_N(t) = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N}\right) e^{ijt} \quad \text{et} \quad k_N(t) \geq 0 \quad \forall t.$$

A l'aide de $E = \{2^j\}_{j \geq 0}$ et de $f = k_N$, montrer que l'inégalité de la question 5 n'est pas valable en général pour les fonctions de L^1.

PARTIE III

On se propose de démontrer le résultat $(*)$ de la partie II.

Notations.

w est une fonction positive de L^1.

$L^2(w)$ est l'espace de Hilbert des fonctions complexes f telles que $|f|^2 w \in L^1$, muni de la norme :

$$\|f\|_{L^2(w)} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \; w(t) \frac{dt}{2\pi}.\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si $n \in \mathbb{Z}$, e_n est la fonction définie par $e_n(x) = e^{inx}$.

V est l'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n>0}$. $\overline{V}$ est l'adhérence de V dans $L^2(w)$.

W est l'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n \neq 0}$.

$W_r = \{R \in W; R = \overline{R}\}$.

1. a. Montrer que $f \in \overline{V}$ et $n > 0$ entraînent : $e_n f \in \overline{V}$.

b. Montrer que $R \in W_r \quad \Leftrightarrow \quad R = P + \overline{P}$ avec $P \in V$.

2. a. Montrer qu'il existe un unique $\varphi \in \overline{V}$ tel que :

$$\|1 + \varphi\|_{L^2(w)} = \inf_{P \in V} \|1 + P\|_{L^2(w)}.$$

b. Si $\phi = 1 + \varphi$, montrer les deux égalités suivantes :

$$\int_0^{2\pi} (\overline{\phi} e_n w)(t) \frac{dt}{2\pi} = 0 \quad \text{si } n > 0. \tag{$**$}$$

$$\int_0^{2\pi} (|\phi|^2 e_n w)(t) \frac{dt}{2\pi} = 0 \quad \text{si } n > 0. \tag{$***$}$$

c. En déduire qu'il existe $c \geq 0$ tel que $(|\phi|^2 w)(t) = c^2 \quad dt$ presque partout.

3. a. On suppose que la constante c de la question précédente est > 0 et on pose $h = \frac{1}{\phi}$; montrer que $h \in H^2$. [*Indication* : utiliser $(**)$.]

b. Montrer que $P \in V \quad \Longrightarrow \quad c^2 \widehat{h}(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} [(1+P)\overline{\phi} w](t) \frac{dt}{2\pi}$ puis que $\widehat{h}(0) = 1$.

Dans la suite de III, on aura besoin de la notation suivante :

$\|u\|_0 = \exp\left[\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(|u(t)|)\, \frac{dt}{2\pi}\right]$ (où $u \in L^1$ et ln est le logarithme népérien).

(On a $0 \leq \|u\|_0 < \infty$).

4. a. Montrer que $\|u\|_0 \leq \|u\|_1, \quad \forall u \in L^1$.

b. Montrer que si u, v, uv sont dans L^1 : $\|uv\|_0 = \|u\|_0 \|v\|_0$.

c. Soit $R \in W_r$; montrer que $\|w\|_0 \leq \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{R(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi}$.

d. On suppose $\ln w \in L^1$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\ln w)(t) dt = 0$; montrer qu'il existe une suite g_n de fonctions réelles, bornées et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$ par rapport à dt, telles que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{g_n(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi} \to 1$.

e. Pour n fixé, on pose $R_N = k_N * g_n$; montrer que $R_N \in W_r$ et que :

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{R_{N_j}(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{g_n(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi}$$

où (N_j) est une sous-suite convenable de la suite des entiers ≥ 1.

f. Montrer que l'on a toujours (c'est-à-dire même si $\ln w \notin L^1$) :

$$\|w\|_0 = \inf_{R\in W_r} \int_0^{2\pi} e^{R(t)} w(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

5. a. Montrer que $\|w\|_0 = \inf\limits_{P\in V} \left[\displaystyle\int_0^{2\pi} (|e^P|^2 w)(t) \frac{dt}{2\pi}\right]$.

b. Montrer que si $P \in V$, il existe une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ de V avec $1 + Q_n \to e^P$ uniformément sur $[0, 2\pi]$ et en déduire que :

$$\|w\|_0 \geq \inf_{Q\in V} \int_0^{2\pi} (|1+Q|^2 w)(t) \frac{dt}{2\pi}$$

puis que $\|\ |1+P|^2\|_0 \geq 1, \quad \forall P \in V$.

c. Montrer que $\|w\|_0 = \inf\limits_{Q\in V} \displaystyle\int_0^{2\pi} (|1+Q|^2 w)(t) \frac{dt}{2\pi}$.

6. Soit $f \in H^1$.

a. Montrer que $Q \in V \quad \Longrightarrow \quad |\widehat{f}(0)|^2 \leq \displaystyle\int_0^{2\pi} (|1+Q|^2 |f|^2)(t) \frac{dt}{2\pi}$.

b. Montrer que $|\widehat{f}(0)| \leq \|f\|_0$.

c. Montrer que $f \neq 0 \Rightarrow \|f\|_0 > 0$.

7. Soit $f \in H^1$, $f \neq 0$ et soit $w = |f|$.

a. Montrer que la constante c de la question III.3.a. est > 0. Avec les notations de cette question, on pose :

$$\alpha = ch \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{f}{\alpha}.$$

b. Montrer qu'il existe une suite Q_n de V telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} (|\phi f - (1+Q_n)f|)(t)\frac{dt}{2\pi} \to 0$ et en déduire que $\phi f \in H^1$.

c. Conclure : $f = \alpha\beta$; α et β sont dans H^2 ; et $\|\alpha\|_2\|\beta\|_2 = \|f\|_1$.