

Résumé du cours d'Intégration

1. Intégrale de Riemann des fonctions réglées.

Fonctions réglées. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *régulée* si et seulement si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Caractérisation des fonctions réglées. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est réglée si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en tout point.

Intégrale de Riemann des fonctions réglées. La définition de l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier s'étend aux fonctions réglées de manière unique de la manière suivante : Si (f_n) est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$, alors la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ converge vers un nombre, indépendant de la suite (f_n) , que l'on note $\int_a^b f(x)dx$.

2. Fonctions Riemann-intégrables.

Définition d'une fonction Riemann-intégrable. Une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est *Riemann-intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t) - \varphi(t)| \leq \mu(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)dx < \varepsilon.$$

Théorème et définition. Construction de l'intégrale des fonctions Riemann-intégrables. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable. En donnant à ε les valeurs d'une suite (ε_n) positive et tendant

vers 0 dans la définition, on voit qu'il existe deux suites (φ_n) et (μ_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f - \varphi_n| \leq \mu_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \mu_n(x) dx = 0.$$

La suite $\left(\int_a^b \varphi_n(x) dx\right)$ est alors une suite de Cauchy, donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix des fonctions en escaliers φ_n et μ_n . On la note $\int_a^b f(x) dx$.

Théorème. Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable si et seulement si f est bornée, continue sauf sur un ensemble négligeable.

Théorème de convergence uniforme des suites de fonctions intégrables. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors, f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Sommes de Riemann.

Somme de Riemann. Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à f relativement à cette subdivision toute somme

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Théorème. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable si et seulement si les sommes de Riemann associées à f convergent quand le pas de la subdivision tend vers 0 (en particulier, elles convergent vers l'intégrale de f sur $[a, b]$).

4. Intégrales généralisées.

Critère de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.$$

Règle de comparaison. Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur tout segment fermé borné inclus dans $[a, b[$. Si $f = O(g)$ au voisinage de b et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.

Critère de Bertrand. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \text{ converge si et seulement si } (\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1))$$

Absolue convergence. Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Règle d'Abel. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^1 et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que f soit décroissante et tend vers 0 en b , et il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b[$, $|\int_a^x g(t)dt| \leq M$. Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

5. Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Définition. La mesure extérieure de tout intervalle I (ouvert, fermé ou semi-ouvert) et ayant pour extrémités $a < b$ est le nombre réel positif $b - a$. On le note $m^*(I)$

On étend la mesure extérieure à tous les ouverts de $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

Proposition et définition. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts $]a_n, b_n[$ pour $n \in \mathbb{N}$. Cette écriture est unique. La mesure extérieure d'un tel ouvert sera alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n).$$

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ borné. La mesure extérieure de A est

$$m^*(A) = \inf\{m^*(U), U \text{ ouvert et } A \subset U\}.$$

Si $A \subset [a, b]$, la mesure intérieure de A est $m_*(A) = (b-a) - m^*([a, b] \setminus A)$.
Si maintenant A est non borné, les mesures extérieure et intérieure de A sont

$$m^*(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m^*(A \cap [-n, n]) \quad \text{et} \quad m_*(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_*(A \cap [-n, n])$$

On dit que A est mesurable si et seulement si $m_*(A) = m^*(A)$. On note $m(A)$ la valeur commune. $m(A)$ est la mesure de Lebesgue de A .

L'ensemble des mesurables forme une tribu (*cf.* section 6) et la mesure de Lebesgue est une mesure (*cf.* section 6).

6. Tribus

Définition. Soit Ω un ensemble et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On note $A^c = \Omega \setminus A$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une *tribu* si

- (1) $\Omega \in \mathcal{T}$
- (2) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$
- (3) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un *espace mesurable* et que tous les éléments de $\mathcal{T}$ sont les ensembles *mesurables*.

On appelle *mesure positive* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute fonction $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$
- (2) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}, \text{ deux à deux disjoints, } \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un *espace mesuré*.

Si $\mu(\Omega) < +\infty$, on dit que μ est une mesure *finie*.

Si $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ où $\mu(A_n) < \infty$, on dit que μ est σ -*finie*.

Mesure de Lebesgue sur $[a, b]$. On prend $\Omega = [a, b]$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{M}_{[a,b]}$ des sous-ensembles mesurables de $[a, b]$ pour la mesure de Lebesgue m . $([a, b], \mathcal{M}_{[a,b]}, m)$ est un espace mesuré, et m est une mesure finie.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On prend $\Omega = \mathbb{R}$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue m . $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, m)$ est un espace mesuré, et m est une mesure σ -finie.

Mesure de Dirac en un point. Soit Ω un ensemble muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$, on définit la mesure de Dirac en a par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A \in \mathcal{T}$ et par $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A \in \mathcal{T}$.

Mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. On prend $\Omega = \mathbb{N}$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ_d est la mesure de comptage, c'est-à-dire que $\mu_d(A)$ est égal au cardinal de A , pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ est un espace mesuré, et μ_d est une mesure σ -finie.

7. Fonctions mesurables.

Définition. Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. On dit que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -mesurable (ou plus simplement *mesurable*) si et seulement si,

$$\forall A' \in \mathcal{P}(\Omega'), \quad A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(A') \in \mathcal{T}.$$

Proposition. Soit $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est mesurable.

8. Intégration.

Théorème de la convergence monotone ou théorème de Beppo-Levi. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables, croissante presque partout à partir d'un certain rang. Si $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ (qui existe presque partout et définit une fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Corollaire. Si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives presque partout à partir d'un certain rang, alors

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_n d\mu.$$

Théorème de Fatou. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives presque partout à partir d'un certain rang. Alors

$$\int_{\Omega} \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Théorème de la convergence dominée (Lebesgue 1908-1910). Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers f presque partout. On suppose qu'il existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout; alors :

(i) les f_n et f sont intégrables.

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f - f_n| d\mu = 0.$

(iii) $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu.$

Applications aux séries. Soit $(u_n) = f(n)$ une série absolument convergente. Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mu = \mu_d$ est la mesure de comptage, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} f d\mu_d.$$

Théorème de la convergence dominée pour les séries.

Soit $(a_n(m))_{n,m \in \mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes. On suppose qu'il existe une série c_n de réels positifs ou nuls qui converge et telle que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on ait $|a_n(m)| \leq c_n$. On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_n(m) = b_n$. Alors $\sum |b_n| < +\infty$ et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Théorème d'intégrabilité termes à termes des séries de fonctions.

Soit (u_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

$$\sum \|u_n\|_1 < +\infty.$$

Alors :

- La série de terme général (u_n) converge absolument presque partout ;
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est définie p.p et est intégrable ;

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_n d\mu.$$

Corollaire. $L^1(\Omega)$ est complet.

Théorème de continuité et de dérivation sous le signe somme pour un intervalle compact. Soient $a < b$ deux réels, (E, d) un espace métrique, et $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{C}$. Si f est continue, alors l'application $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est continue sur E .

- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{C}$ est telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a, b] \times I$, alors l'application $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est de classe C^1 sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$.

- Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et telle que $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe, alors l'application $F(z) = \int_a^b f(t, z) dt$ est holomorphe sur U et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(t, z) dt$.

Théorème de continuité sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et (E, d) un espace métrique. Soit $f : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- i. Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x) \in L^1(\Omega)$
- ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto f(t, x)$ est continue.
- iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \Omega$, $|f(t, x)| \leq g(t)$.

Alors l'application $F : x \mapsto \int_{\Omega} f(t, x) d\mu(t)$ est continue.

Théorème de dérivation sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- i. Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x) \in L^1(\Omega)$
- ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto f(t, x)$ est dérivable.
- iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \Omega$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq g(t)$.

Alors l'application $F : x \mapsto \int_{\Omega} f(t, x) d\mu(t)$ est dérivable, et

$$F'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) d\mu(t).$$

Théorème d'holomorphie sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- i. Pour tout $z \in U$, $t \mapsto f(t, z) \in L^1(\Omega)$
- ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe
- iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $z \in U$, $|f(t, z)| \leq g(t)$.

Alors l'application $F : z \mapsto \int_{\Omega} f(t, z) d\mu(t)$ est holomorphe dans U , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z^n}(t, z) d\mu(t)$.

9. Intégrales multiples.

Définition. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis.

On note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$ où $(A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

Il existe une unique mesure notée $\mu_1 \otimes \mu_2$ telle que

$$\forall (A_1, A_2) \in (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2), \quad \mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Cette mesure est la mesure produit de μ_1 et μ_2 .

Théorème de Tonelli. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis. Soit $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

Théorème de Fubini. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ -finis. Soit $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \rightarrow [0, +\infty]$ intégrable, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(x, y)| d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x, y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x, y)| d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) < +\infty. \end{aligned}$$

Alors :

- pour presque tout $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2 \mapsto f(x, y)$ est intégrable
 - pour presque tout $y \in \Omega_2$, $x \in \Omega_1 \mapsto f(x, y)$ est intégrable
 - La fonction $x \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ est définie presque partout et intégrable
 - La fonction $y \in \Omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ est définie presque partout et intégrable
- et on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

C'est en particulier le cas si l'un des nombres

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \quad \text{ou} \quad \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

est fini.

Théorème de changement de variable. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(U)$. Soit $\varphi : U' \rightarrow U$ un C^1 -difféomorphisme. Alors

$$\int_{U'} f(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt = \int_U f(x) dx,$$

où $J\varphi(t)$ est le jacobien au point $t \in U'$ de la fonction φ .

10. Espaces L^p .

Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega) = \{f / |f|^p \in L^1(\Omega)\}$. On note $\|f\|_p = (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{1/p}$.

L^∞ est l'ensemble des fonctions mesurables dont le module est borné par une constante C presque partout. On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{C / |f| \leq C \text{ p.p.}\}.$$

Inégalité de Hölder. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Inégalité de Minkowski. $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème de Riesz-Fischer. L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Inégalité de Jensen. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$. Soient $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \Omega \rightarrow]a, b[$ un élément de $L^1(\Omega)$. Soit $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors on a l'inégalité

$$\varphi \left(\int_{\Omega} f d\mu \right) \leq \int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu.$$

11. Convolution, Régularisation et approximation par convolution.

Théorème. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Proposition et définition. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$ de Ω tels que, pour tout $i \in I$, $f = 0$ p.p. sur ω_i . On pose $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$. Alors $f = 0$ p.p. sur ω . Par définition, $\text{supp } f = \Omega \setminus \omega$.

Proposition. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors $\text{supp } (f * g) \subset \overline{\text{supp } f} + \text{supp } g$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, note $C_o^k(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k et à support compact.

Proposition. Soient $f \in C_o^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g,$$

pour $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ et $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.

En particulier, si $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition. On appelle suite régularisante toute suite (ρ_k) de fonctions telles que

$$\rho_k \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \rho_k \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right), \quad \int \rho_k = 1, \quad \rho_k \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n.$$

Théorème. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors $\rho_k * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

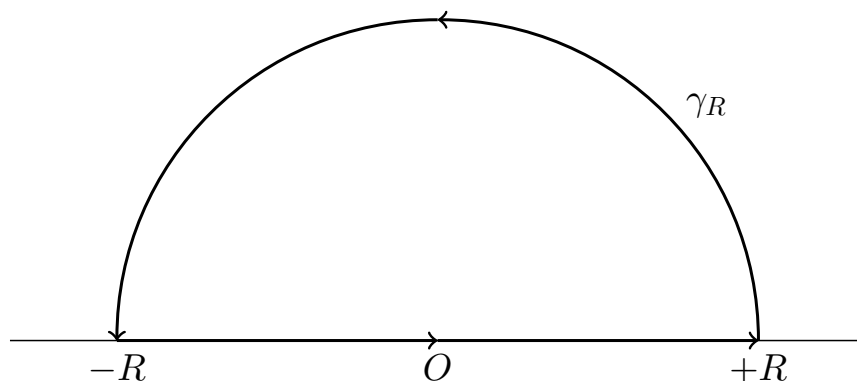
12. Calculs d'intégrales par la méthode des résidus.

1. Calcul des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et $\deg Q \geq \deg P + 2$.

On considère $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ que l'on intègre sur le contour



et on fait tendre R vers $+\infty$.

Le résultat est

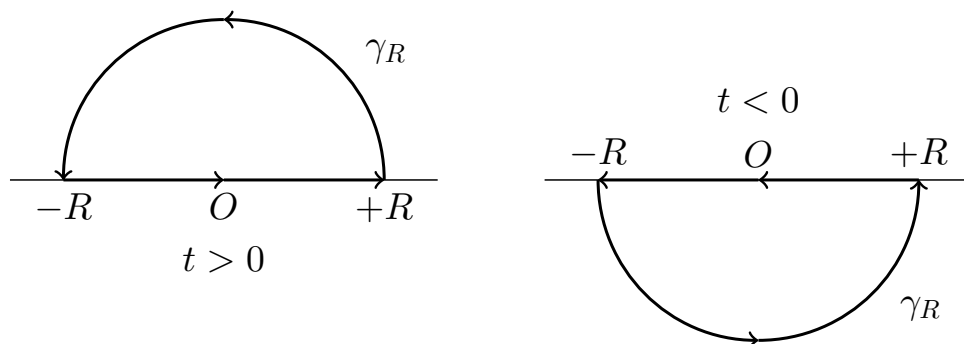
$$2\pi i \sum \text{res } (f, \text{Im } z > 0).$$

2. Calcul des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx$$

où P et Q sont des polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et $\deg Q \geq \deg P + 1$.

On considère $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{itz}$ que l'on intègre sur le contour



et on fait tendre R vers $+\infty$.

Le résultat est

$$2\pi i \sum \text{res} (f, 1/2 \text{ plan}).$$