Théorème de Rouché et applications.

Voir le livre de Rudin, Analyse réelle et complexe.

Rappel. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $R > 0$ tel que $\overline{D}(a,R) \subset U$. Si $f \in H(U)$ ne s'annule pas sur $\partial D(a,R)$, alors le nombre de zéros de f dans $D(a,R)$ est égal à*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)} = \mathrm{Ind}_{f(\partial D(a,R))}(0).$$

En effet, les zéros de f dans $D(a,R)$ sont en nombre fini (sinon, l'ensemble des zéros de f aurait un point d'accumulation dans $\overline{D}(a,R)$ et f serait identiquement nulle sur $\overline{D}(a,R)$, donc sur $\partial D(a,R)$).
Soient $(a_1,m_1),\dots,(a_N,m_N)$ les zéros de f dans $D(a,R)$ comptés avec multiplicité.
Pour $k=1,\dots,N$, il existe un voisinage $D(a_k,r_k)$ de a_k où on peut écrire

$$f(z) = (z-a_k)^{m_k} f_k(z)$$

où f_k ne s'annule pas $D(a_k,r_k)$.
On a alors dans $D(a_k,r_k)$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_l}{z-a_k} + \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}$$

ce qui montre que f'/f a des singularité polaires d'ordre 1 aux points a_k et que le résidu de f'/f en ces points est m_k.
La formule des résidus donne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)} = \sum_{k=1}^N m_k,$$

ce qui achève la preuve de ce rappel. □

Le théorème de Rouché permet d'estimer le nombre de zéros d'une fonction dans un disque, si on sait combien de zéros possède une fonction "voisine".

Théorème de Rouché. *Soient $f,g \in H(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $a \in U$ et si $R>0$ est tel que $\overline{D}(a,R) \subset U$, et si*

$$|f(z)-g(z)| < |f(z)| \qquad \forall z \in \partial D(a,R),$$

les fonctions f et g ont le même nombre de zéros dans $D(a,R)$ (à condition de les compter avec multiplicités).

Preuve. Nous allons d'abord montrer le lemme suivant :

Lemme. *Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux chemins fermés dont l'intervalle de paramétrage est $[a,b]$. On suppose que*

$$\forall t \in [a,b], \qquad |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|. \tag{1}$$

Alors

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0). \tag{2}$$

Preuve. En effet, (1) entraîne que $0 \notin \gamma_1^*$ et que $0 \notin \gamma_2^*$. Posons

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}.$$

Nous avons

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \tag{3}$$

et (1) montre que

$$|1 - \gamma(t)| < 1 \qquad \forall t \in [a, b].$$

Ainsi, $\gamma^* \subset D(1, 1)$, et 0 et situé dans la composante connexe non bornée du complémentaire de γ^*, de sorte que $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$. En intégrant maintenant (3) sur $[a, b]$, on obtient (2), ce qui prouve le lemme. □

Preuve du théorème de Rouché. Soit $\gamma = \partial D(a, R)$ le cercle orienté positivement de centre a et de rayon R. Posons $\gamma_1 = f \circ \gamma$ et $\gamma_2 = g \circ \gamma$.
Soient N_1 et N_2 les nombres de zéros de f et de g dans $D(a, R)$. D'apprès le lemme précédent,

$$N_1 = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) = N_2.$$

□

Une application. *Si n est un entier positif et si l'on pose*

$$g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes, la fonction polynomiale g a exactement n zéros dans le plan.

Preuve. Posons $f(z) = z^n$. Soit $r > 1$ et $r > |a_{n-1}| + \cdot + |a_0|$.
Si $|z| = r$, on a

$$|f(z) - g(z)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq r^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < r^n = |f(z)|.$$

Donc f et g ont le même nombre de zéros dans $D(0, r)$, d'après le théorème de Rouché ; et comme f a n zéros, la démonstration est terminée. □

Une application (Nourdin, p. 65, beaucoup d'autres applications analogues dans bon nombre d'ouvrages). *Montrez que les 7 racines de $z^7 - 5z^3 + 12$ se trouvent dans la couronne $\{z,\ 1 < |z| < 2\}$.*

Posons $f(z) = 12$ et $g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$.
Si $|z| = 1$, alors $|f(z) - g(z)| = | - z^7 + 5z^3| \leq |z|^7 + 5|z|^3 = 6 < 12$, donc f et g ont le même nombre de zéro dans le disque unité, c'est-à-dire 0.
Posons $f(z) = z^7$ et $g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$.
Si $|z| = 2$, alors $|f(z) - g(z)| = |5z^3 - 12| \leq 5|z|^3 + 12 = 52 < 128 = 2^7 = |f(z)|$, donc f et g ont le même nombre de zéros dans le disque de centre 0 et de rayon 2, c'est-à-dire 7.

Une version un peu plus générale du théorème de Rouché : *soit U un ouvert étoilé. Soit $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin fermé simple, c'est-à-dire que γ^* est le bord d'un compact K inclus dans U et que pour tout point z de K, on a $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$.*
Si $f \in H(U)$ ne s'annule pas sur γ^*, le nombre de zéros de f dans K est

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)}.$$

La preuve est totalement identique à celle du cas où γ est un cercle.
Enfin, si $f, g \in H(U)$ sont telles que

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \forall z \in \gamma^*$$

les fonctions f et g ont le même nombre de zéros dans K (à condition de les compter avec multiplicités). Là encore, la preuve est totalement similaire.

Une application. *L'équation $z=\tan z$ dans $\mathbb{C}$ n'a que des solutions réelles. Si on note r_n la $n-$ième solution dans $\mathbb{R}_*^+$ (si celles-ci sont classées par ordre croissant), on a quand $n\to+\infty$*

$$r_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^2} =$$

Sur chacun des intervalles $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$, pour $n\in\mathbb{Z}$, la dérivée de la fonction tan est $1+\tan^2$, tan tend vers $-\infty$ en $(]-\frac{\pi}{2}+n\pi)_+$ et vers $+\infty$ en $(]\frac{\pi}{2}+n\pi)_-$, donc l'équation $z=\tan z$ admet une seule racine r_n dans ces intervalles.
On a $r_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $r_n=-r_{-n}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $(r_n)_n \to_{n\to+\infty} +\infty$, on en déduit que $\tan r_n = r_n$ tend vers $+\infty$, donc que $r_n = \frac{\pi}{2}+n\pi-\varepsilon_n$ où $(\varepsilon_n)_n$ est une suite à valeurs dans $]0,\pi[$ et $(\varepsilon_n)_n \longrightarrow 0$.
On a alors $\tan r_n = \tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_n) = \frac{1}{\tan\varepsilon_n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon_n}$ et d'autre part $\tan r_n = r_n = n\pi+\frac{\pi}{2}-\varepsilon_n \sim_{n\to+\infty} n\pi$ donc

$$\varepsilon_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\pi}.$$

On obtient alors

$$r_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut itérer le processus. Si on écrit

$$r_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + u_n,$$

avec $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors

$$\tan r_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{n\pi}-u_n\right)} = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + u_n.$$

Or $\tan x =_0 x + o(x^2)$, donc $\tan\left(\frac{1}{n\pi}-u_n\right) = \frac{1}{n\pi} - u_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Ceci nous donne donc

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{n\pi}-u_n\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n\pi}-u_n+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n\pi}{1-n\pi u_n + o\left(\frac{1}{n}\right)} = n\pi\left(1+n\pi u_n + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\pi + n^2\pi^2 u_n + o(1)$$

donc

$$n\pi + n^2\pi^2 u_n + o(1) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + u_n,$$

soit encore

$$n^2\pi^2 u_n = \frac{\pi}{2} + o(1).$$

On a alors

$$u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi n^2},$$

donc

$$r_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Pour conclure que les seules racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z=\tan z$ sont les r_n, il suffit de montrer que l'équation $z=\tan z$ admet $2n+1$ racines dans le carré C_n de centre 0 et de côté $2n\pi$.
Pour cela, on pose $f(z)=z\cos z$ et $g(z)=z\cos z-\sin z$. Alors $z=\tan z$ si et seulement si $g(z)=0$.
Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme. *Si $z \in \partial C_n$, $z = x + iy$, nous avons*

$$|\tan z| = |\operatorname{th} y| \qquad \text{si } |x| = n\pi \text{ et } -n\pi \le y \le n\pi$$

$$\operatorname{th} n\pi \le |\tan z| \le \frac{1}{\operatorname{th} n\pi} \qquad \text{si } |y| = n\pi \text{ et } -n\pi \le x \le n\pi$$

Preuve du lemme. En effet, si $z = x + iy$, on a

$$|\sin z| = |\sin x \cos iy + \cos x \sin iy| = |\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y|$$

et

$$|\cos z| = |\cos x \cos(iy) - \sin x \sin iy| = |\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y|.$$

Si $|x| = n\pi$ et $-n\pi \le y \le n\pi$, nous avons

$$|\tan z| = \frac{|\sin z|}{|\cos z|} = \sqrt{\frac{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}} = |\operatorname{th} y|$$

tandis que si $-n\pi \le x \le n\pi$ et $|y| = n\pi$, nous avons

$$|\tan z| = \sqrt{\frac{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y}{\cos^2 x \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{|\operatorname{th} y|} = \frac{1}{\operatorname{th} n\pi}$$

et

$$|\tan z| = \sqrt{\frac{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}} \ge \sqrt{\frac{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y}} = |\operatorname{th} y| = \operatorname{th} n\pi.$$

Ceci prouve le lemme.
Grâce au lemme, nous avons sur ∂C_n

$$\frac{|f(z) - g(z)|}{|f(z)|} = \left|\frac{\tan z}{z}\right| \le \frac{1}{n\pi \operatorname{th} n\pi} < 1$$

si $n \ge 1$.
On déduit du théorème de Rouché que f et g ont le même nombre de zéros dans C_n.
Or $f(z) = 0$ avec $z = x + iy$ si et seulement si $z = 0$ ou bien $\cos x \operatorname{ch} y = \sin x \operatorname{sh} y = 0$, donc si et seulement si $z \in (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \cup \{0\}$. Il y a $2n + 1$ tels points dans C_n, et le cardinal des r_k pour $k \in \mathbb{Z}$ qui sont dans C_n est aussi $2n + 1$. Ceci prouve, in fine, que toutes les solutions de $z = \tan z$ sont les r_n où $n \in \mathbb{Z}$.
Calculons maintenant $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^2}$. On remarque que les r_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les zéros simples de $g(z) = z \cos z - \sin z$, donc les pôles simples de

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{z \sin z}{\sin z - z \cos z}$$

dont les résidus sont égaux aux multiplicités, donc égaux à 1.
On considère alors

$$F(z) = \frac{g'(z)}{z^2 g(z)} = \frac{\sin z}{z(\sin z - z \cos z)} = \frac{1}{z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\tan z}\right)}$$

qui a les mêmes pôles que g'/g qui sont les r_n et sont simples, sauf $r_0 = 0$ qui est un pôle triple.
Grâce au lemme, sur ∂C_n, nous avons

$$|\tan z| \le \frac{1}{\operatorname{th} n\pi}$$