Série 5: Extraction diagonale, compacité

Théorèmes d'Ascoli, approximation polynomiale.

Voir Gourdon p. 27–38, Pommellet p. 50–58, Vauthier-Pratt p.27–41, Choquet p. 140–150.

Exercice 1. : Soit (E, d) un espace métrique. Montrez que E est compact si et seulement si E est complet et précompact (on dit aussi parfois totalement borné, c'est à dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε qui recouvrent E). On pourra par exemple montrer qu'une suite a une valeur d'adhérence en montrant qu'il existe une suite emboîtée de boules de rayon $\frac{1}{n}$ contenant une infinité de termes de la suite.

Exercice 2. : *Procédé d'extraction diagonale.*

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts. Montrez que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un espace métrique compact.

2. Soit $a = (a_n)_n$ une suite d'éléments positifs. A quelles conditions sur a l'ensemble $A = \{u = (u_n) \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq a_n\}$ est-il un convexe compact ? (*Indication :* Montrer que A est convexe et fermé, quel que soit a. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit bornée est que $a \in \ell^2$. Montrer enfin que $a \in \ell^2$ implique que A est compact en utilisant un procédé d'extraction diagonale).

3. Soit $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}$$

Montrer que E est compact. Montrer que tout espace métrique compact A est homéomorphe à un sous-espace de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. (*Indication :* (A, d) est borné donc on peut supposer que d est à valeurs dans $[0, 1]$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans A. Prendre $\Phi : A \ni x \mapsto (d(x, y_n))_n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$.)

Exercice 3. : Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles non vides de E.

1. On suppose que A et B sont compacts. Montrez que $A+B$ est compact et que la réunion des segments joignants A à B est compacte.
2. On suppose que A est compact et B est fermé. Montrer qu'alors $A+B$ est fermé. Le résultat reste-t'il vrai si on suppose seulement A fermé ?
3. On suppose que A est ouvert et B est quelconque. Montrer que $A+B$ est ouvert.

Exercice 4. : *Isométries d'un compact dans lui-même.* Soit (E,d) un espace métrique, A une partie compacte et $f : A \to A$ une isométrie. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 5. : *Dilatations d'un compact dans lui-même.* Soit (E,d) un espace métrique, A une partie compacte et $f : A \to A$ une dilatation, c'est à dire que, pour tous $x,y \in A$, $d(f(x),f(y)) \geq d(x,y)$. Montrer que f est un homéomorphisme isométrique.

Exercice 6. : *Continuité et graphe fermé.*
Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$ et $f : A \to E$ telle que $\overline{f(A)}$ soit compacte. Montrer que si le graphe $G_f = \{(x,f(x)), x \in A\}$ est fermé dans $A \times E$, alors f est continue. Obtenez-vous le même résultat si vous retirez l'hypothèse $\overline{f(A)}$ compact ?

Exercice 7. : Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie compacte de E. Montrez que, pour tout $x \in A$, il existe $y \in \partial A$ tel que $[x,y] \subset A$.

Exercice 8. : Montrez que, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, toute partie compacte est d'intérieur vide.

Exercice 9. : *Compacité des sphères en dimension infinie.* Montrer qu'en dimension infinie, la sphère unité n'est jamais compacte.

Exercice 10. : *Premier Théorème d'Ascoli*
Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques, $\mathcal{F} \subset F^E$.
On dit que $\mathcal{F}$ est *équicontinue* en $x \in E$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall y \in E,\ \forall f \in \mathcal{F}, \quad d(x,y) < \alpha \ \Rightarrow\ d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est *uniformément équicontinue* sur E ssi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in E,\ \forall f \in \mathcal{F}, \quad d(x,y) < \alpha \ \Rightarrow\ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

1. Montrez que, si $\mathcal{F} \subset F^E$ est équicontinue en $x \in E$, alors l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ pour la topologie de la convergence simple est équicontinue en $x \in E$.

2. Montrez qu'une limite simple d'une suite équicontinue de fonctions est continue. Remontrez directement ce résultat.

<u>**Exercice 11.**</u> : *Deuxième théorème d'Ascoli.*
Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, $\mathcal{F} \subset F^E$ et E_0 une partie dense dans E.

1. Vérifiez que la topologie de la convergence simple sur E_0 est moins fine que la topologie de la convergence simple sur E, elle-même moins fine que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

2. On veut montrer que, si $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue, alors les trois topologies précédentes coïncident sur $\mathcal{F}$.

  a. Montrez qu'il suffit de montrer que, si $f \in \mathcal{F}$, si K est un compact de E et si $\varepsilon > 0$, alors :

$$V(f, K, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{F} \mid \forall x \in K,\ d'(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$$

  contient un voisinage de f pour la topologie de la convergence simple sur E_0.

  b. Montrez que :

$$\forall x \in K,\ \exists U_x \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in U_x,\ \forall g \in \mathcal{F}, \quad d'(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

  c. Montrez qu'il existe $y_1, \ldots, y_n \in E_0$ tels que

$$W(f, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{\varepsilon}{5}) = \{g \in \mathcal{F} \mid \forall i \in [1, n] \quad d'(f(y_i), g(y_i)) < \frac{\varepsilon}{5}\}$$

  soit inclus dans $V(f, K, \varepsilon)$. Conclure.

3. Montrez que, si $f_n : E \to F$ est équicontinue, si $f : E \to F$ est continue et si $f_n \to f$ simplement sur E_0, alors f_n converge uniformément vers f sur tout compact.

4. Montrez que, si F est complet, et si $f_n : E \to F$ est équicontinue et converge simplement sur E_0, alors f_n converge uniformément sur tout compact (on pourra montrer que $\{x \in E \mid (f_n(x))$ est une suite de Cauchy$\}$ est fermé dans E).

Exercice 12. : *Théorème de Heine*
Soit (E,d) un espace métrique compact et (F,d') un espace métrique. Montrez que $\mathcal{F} \subset F^E$ est équicontinue ssi $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.

Exercice 13. : *Troisième théorème d'Ascoli.*
Soit (E,d) un espace métrique compact. On munit l'espace $\mathbb{K}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. On considère $C(E,\mathbb{K}^n)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On s epropose de montrer le résultat suivant, appelé Théorème d'Ascoli : "$\mathcal{F} \subset C(E,\mathbb{K}^n)$ est relaticement compacte si et seulement si $\mathcal{F}$ est bornée et équicontinue.

1. Montrez que si $\mathcal{F}$ est relativement compacte, alors $\mathcal{F}$ est bornée et équicontinue.
2. Réciproquement, on suppose $\mathcal{F}$ bornée et équicontinue. Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrez qu'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall p,q \geq n \qquad \|f_{\varphi(p)} - f_{\varphi(q)}\|_\infty < \varepsilon.$$

   Conclure.

Exercice 14. : On considère sur $C^0[a,b]$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ et sur $C^1[a,b]$ la norme $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$.

1. Montrez que, si (u_n) est une suite de $C^1[a,b]$ bornée pour $\|\cdot\|$, alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans C^0 pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C(\varepsilon) > 0, \quad \forall u \in C^2[a,b], \quad \|u'\|_\infty \leq \varepsilon \|u''\|_\infty + C(\varepsilon)\|u\|_\infty.$$

   (On pourra montrer que, dans le cas contraire, il existe $\varepsilon > 0$ et il existe une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| = 1$ et telle que

$$\|u_n'\|_\infty > \varepsilon \|u_n''\|_\infty + n\|u_n\|_\infty.$$

   Montrez ensuite que $\|u_n'\|$ est bornée et conclure en utilisant 1).
3. Montrez que, si $u \in C^2(\mathbb{R})$ est telle que u et u'' sont bornées, alors u' est bornée et

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \|u'\|_\infty \leq \varepsilon \|u''\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_\infty.$$

<u>Exercice 15</u>. : *Théorème de Peano.*
Soit $f : [-1,1] \times \bar{B}(0,r) \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^n$ une application continue. On note

$$M = \sup_{\substack{|t|\leq 1 \\ \|x\|\leq r}} \|f(t,x)\|.$$

1. Montrez que f est limite uniforme sur $[-1,1] \times \bar{B}(0,r)$ d'une suite $(P_k(t,x))_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2. En utilisant le théorème d'Ascoli ainsi qu'une version quantitative du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrez que l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \quad \text{avec } \|x_0\| < r \end{cases}$$

admet au moins une solution. Unicité ?

<u>Exercice 16</u>. : *Théorème de Montel.*
Une partie $\mathcal{H}$ de $H(\Omega)$ est bornée ssi pour tout compact K de Ω, il existe M_K tel que, pour tout $z \in K$, pour tout $f \in \mathcal{H}$, $|f(z)| \leq M_K$. Montrez que les compacts de $H(\Omega)$ sont les fermés bornés. Montrez que si une suite (f_n) de fonctions holomorphes est bornée sur tout compact, alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément sur tout compact.

Théorème de Stone-Weierstraß

Définition. Soient X et Y deux ensembles et $A \subset Y^X$. On dit que A *sépare les points de* X si

$$\forall x,y \in X, \quad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \exists f \in A, \quad f(x) \neq f(y).$$

Théorème de Stone–Weierstraß. *Soit X un espace topologique compact, et soit A une sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ telle que :*

i. *A sépare les points de X,*
ii. *$\forall x \in X$, $\exists f \in A$, $f(x) \neq 0$.*

Alors $\overline{A} = C(X,\mathbb{R})$ (adhérence pour la topologie de la convergence uniforme).

Théorème de Stone–Weierstraß. *Soit X un espace topologique compact, et soit A une sous-algèbre de $C(X,\mathbb{C})$ telle que :*

i. *A sépare les points de X,*
ii. *$\forall x \in X$, $\exists f \in A$, $f(x) \neq 0$.*
iii. *$\forall f \in C(X,\mathbb{C})$, $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$.*

Alors $\overline{A} = C(X,\mathbb{C})$ (adhérence pour la topologie de la convergence uniforme).

Exercices.

<u>**Exercice 17**</u>. *Théorèmes d'approximations classiques.* (Choquet p. 145)

1. Soit X une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Montrez que toute fonction $f \in C(X, \mathbb{C})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes à n variables et à coefficients complexes.
2. Montrez que toute fonction $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $2\pi-$périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques $\sum_{-n}^{n} a_p e^{ipt}$.
3. Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Montrez que tout fonction $f \in C(X \times Y, \mathbb{C})$ est limite uniforme de fonctions de la forme
$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y),$$
avec $g_i \in C(X, \mathbb{C})$ et $h_i \in C(Y, \mathbb{C})$.
4. Montrez que toute fonction f continue sur $[1, +\infty[$ et ayant une limite finie est limite uniforme d'une suite de fonctions de la forme $\sum_{p=0}^{n} a_p e^{-pt}$.

<u>**Exercice 18**</u>. *Prolongement d'applications continues.*(Choquet p.145)

On se propose de montrer que si Y est une partie fermée d'un espace métrique compact X, alors toute fonction $f \in C(Y, \mathbb{R})$ est la restriction à Y d'un élément de $C(X, \mathbb{R})$.

1. Montrez que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in C(X, \mathbb{R})$ telle que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$ sur Y.
2. Posons $g_\varepsilon = \sup(\alpha, \inf(\beta, f_\varepsilon))$ où α et β désignent les bornes inférieures et supérieures de f sur Y. Montrez que g_ε a les mêmes bornes que f et vérifie $|f - g_\varepsilon| < \varepsilon$ sur Y. On appellera régularisée d'ordre ε de f la fonction g_ε ainsi construite, et on la notera f_ε.
3. On définit par récurrence la suite $h_n \in C(X, \mathbb{R})$ telle que
$$h_1 = f_{\frac{1}{2}}; \qquad h_n = \left(f - \sum_{k=1}^{n} h_k \right)_{\frac{1}{2^n}}$$
avec les notations précédentes. Montrez que
$$\left| f(y) - \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{sur } Y \qquad |h_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{sur } X.$$
Conclure.

Exercice 19.
Soit $P_n(t)$ la suite de polynômes définie par la relation de récurrence :

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n^2(t)\right) \qquad \text{et } P_1(t) = 0.$$

Montrez que la suite (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{t}$ sur $[0,1]$.

Exercice 20. Soit E un espace compact et soit $f_1, \dots f_n$ une famille d'éléments de $C(X, \mathbb{R})$ qui sépare les points de E. Montrez que E est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 21. *Polynômes de Bernstein.*
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme B_n de degré n par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

où les C_n^k sont les coefficients du binôme.

1. Calculer les polynômes

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k y^{n-k}.$$

2. On pose $r_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Calculer les polynômes

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(x), \quad \sum_{k=0}^{n} k r_k(x), \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_k(x).$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

3. En déduire que la suite de polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.