Agregation de Mathematiques 2003-2004
Universite Aix-Marseille I CMI

Serie 6: Connexite et espaces de Hilbert

Voir Gourdon p. 38–47, Pommellet p. 71–75.

Exercice 1: : Connexe et connexite par par arcs.

1. Soit E un espace metrique et A une partie de E connexe par arcs. Montrez que A est connexe.
2. Soit E un espace vectoriel norme. Soit A une partie ouverte connexe de E. Montrez que A est connexe par arcs.
3. Soit $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,/\, y = \sin\frac{1}{x}\} \cup \{0\} \times [-1;1]$. Montrez que A est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Exercice 2: : Connexite et connexite par arcs des groupes classiques. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On designe par $M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrees de taille n a coe cients dans $\mathbb{K}$.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on designe par $A^* = {}^tA$.

$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K})\,;\, \det A \neq 0\}$.

$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C})\,;\, A^{-1} = A^*\}$.

$SU_n(\mathbb{C}) = \{A \in U_n(\mathbb{C})\,;\, \det A = 1\}$.

$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^{-1} = A^*\}$.

$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R})\,;\, \det A = 1\}$.

Etudier la connexite et la connexite par arcs de ces groupes.

Exercice 3: : Soit F un ferme de $[0;1] \times [0;1]$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, $\{y \in [0;1] / (x;y) \in F\}$ soit un intervalle non vide I_x de $[0;1]$. Montrer qu'il existe x dans $[0;1]$ tel que $x \in I_x$.

Exercice 4: : Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe. (Soient A et B deux points de cet ensemble. Considerer sur la mediatrice de $[A;B]$ l'ensemble des points M tels que l'un des segments $[A;M]$, $[M;B]$ contienne un element de l'ensemble denombrable $\mathbb{Q}^2$).

Exercice 5: : Principe du maximum. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction réelle continue sur Ω est harmonique si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $r > 0$ tel que le disque fermé de centre x et de rayon r soit inclus dans Ω, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + re^{i\theta})d\theta.$$

Montrer que si f harmonique est bornée et atteint son maximum en un point de Ω, alors f est constante.

Exercice 6:

1. Montrez que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.
2. Montrez que $\mathbb{S}^1$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.
3. Montrez que, si $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, alors $h :]\theta;\theta+2\pi[\ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1 \setminus \{z\}$ est un homéomorphisme.
4. Montrez que toute injection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ est un homéomorphisme.

Exercice 7. Parties réversibles. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est réversible si et seulement si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(A) \subset \mathbb{R}\setminus A$ et $f(\mathbb{R}\setminus A) \subset A$.

1. Montrez qu'il n'existe pas d'ensemble réversible dénombrable.
2. Soit A une partie réversible.
   a. Montrer que $f(A) = \mathbb{R}\setminus A$.
   b. En déduire que A ne peut être ouverte.
   c. En déduire que A ne peut être fermée.
3. On se propose dans cette question de montrer qu'il n'existe pas de partie A réversible qui soit un sous-groupe additif de $(\mathbb{R};+)$.
   a. Soit $(H;+)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R};+)$. Soit $\alpha = \inf\{x \in H \mid x > 0\}$. Montrez que si $\alpha = 0$ alors H dense dans $\mathbb{R}$ et que si $\alpha > 0$ alors $H = \alpha\mathbb{Z}$.
   b. En déduire qu'un sous-groupe non dénombrable de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   Supposons maintenant qu'il existe un ensemble réversible A qui soit un sous-groupe additif. Soit $B = \mathbb{R}\setminus A$.

   c. Montrez que, si g est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $g(x) = f(x) + x$, alors $g(\mathbb{R}) \subset B$.
   d. Montrez que, si h est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $h(x) = f(x) - x$, alors $g(\mathbb{R}) \subset B$.
   e. Montrez que g et h sont constantes (On pourra montrer que $B \neq \emptyset$ en utilisant 3.b)
   f. En déduire une contradiction.
4. On se propose dans cette question de montrer que, si f est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sans point fixe, il existe une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R}\setminus A$ et $f(\mathbb{R}\setminus A) \subset A$. Soit donc f une telle application.
   a. Montrez que f est strictement monotone.

b. Montrez qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$ ou bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ puis, pour $n \geq 2$, $f^{n+1} = f^n \circ f$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est en relation avec y et on note $x \mathcal{R} y$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f^n(x)$ (si $n < 0$, on dira que $y = f^n(x)$ si et seulement si $f^{-n}(x) = y$)

c. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Soit $(C_i)_{i \in I}$ les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Pour chaque classe d'équivalence C_i avec $i \in I$, on choisit un et un seul représentant x_i. Posons alors $A = \{f^{2n}(x_i) \mid i \in I;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{f^{2n+1}(x_i) \mid i \in I;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

d. Montrez que $B = f(A)$, $A = f(B)$, $A \cup B = \mathbb{R}$.

e. Montrez en utilisant 4.a et 4.b que $A \cap B = \emptyset$. Conclure.

5. Soit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n; 2n+1[$. Montrez que A est réversible.

Exercice 8. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé réel. Soit f une forme linéaire sur E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $H = \ker f$

1. Montrez que, pour tout $a \in E \setminus H$, on a $H \oplus \mathbb{R}a = E$.
2. Montrez que f est continue si et seulement si son noyau H est fermé dans E (on montrera l'existence d'un $r > 0$ tel que, pour tout $x \in B(0, r)$, on ait $|f(x)| < 1$).
3. Montrez qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé E est soit fermé, soit dense dans E.
4. Soit H un hyperplan fermé d'un espace normé. Soit f une forme linéaire continue associée (pourquoi une ?). Montrer que, pour tout $a \in E$, on a :

$$d(a, H) = \frac{|f(a)|}{\|f\|}.$$

5. On se propose dans cette question de montrer qu'une forme linéaire f est continue si et seulement si le complémentaire de son noyau $E \setminus H$ n'est pas connexe.

a. Montrer que, si f est continue, $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs. En déduire qu'il n'est pas connexe.

Soit maintenant f une forme linéaire non continue. On se propose de montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs.

b. Montrer qu'il suffit pour cela de montrer que, pour tout $a \in E$ tel que $f(a) = 1$, il existe une application continue $\gamma : [0; 1] \to E \setminus H$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = -a$ (on montrera que $C_+ = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ et $C_- = \{x \in E \mid f(x) < 0\}$ sont connexes par arcs et que $E \setminus H = C_+ \cup C_-$).

c. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de E telle que

$$x_0 = a;\ \forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|x_{n+1}\| < \|x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On décompose x_n sur la somme directe $E = H \oplus \mathbb{R}a$:

$$x_n = h_n + \lambda_n a.$$

d. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $_n = 1$.

On pose $\alpha = \|x_0\| > 0$ et définissons l'application φ de $]0,\alpha]$ dans E de la façon suivante :

$$\forall t \in [\|x_{n+1}\|;\|x_n\|], \quad \varphi(t) = \frac{(\|x_{n+1}\| - t)(x_n + h_n) + (t - \|x_n\|)(x_{n+1} + h_{n+1})}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|}.$$

(En fait, φ est l'application affine qui vaut $x_n + h_n$ en $\|x_n\|$ et $x_{n+1} + h_{n+1}$ en $\|x_{n+1}\|$.)

e. Montrer que φ est continue sur $]0,\alpha]$

f. Montrer que :

$$\forall t \in [\|x_{n+1}\|;\|x_n\|], \quad \varphi(t) + a = \frac{(\|x_{n+1}\| - t)(2x_n) + (t - \|x_n\|)(2x_{n+1})}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|}.$$

g. En déduire que :

$$\forall t \in [\|x_{n+1}\|;\|x_n\|], \quad \|\varphi(t) + a\| < 2t.$$

h. Montrer que, si on pose $\varphi(0) = -a$ alors φ est une application continue sur $[0,\alpha]$ telle que $\varphi(0) = -a$, $\varphi(\alpha) = a$ et $\forall t \in]0,\alpha]$, $f(\varphi(t)) = 1$.

i. En déduire l'existence de .

j. Montrer que f est continue si et seulement si le complémentaire de son noyau n'est pas connexe et que f est continue si et seulement si le complémentaire de son noyau n'est pas connexe par arcs.

Espaces de Hilbert.

Voir Gourdon 401–410, Pommellet 238–260, Rudin 72–90.

Exercice 1: : Soit H un espace de Hilbert complexe, $u \in L(H)$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $\langle u(x), x\rangle = 0$. Montrer que $u = 0$. Est-ce vrai si on retire l'hypothèse complexe ?

Exercice 2: : un cas où $F \neq F^{\perp\perp}$: Soit $E = c_{00}$ muni du produit scalaire de ℓ^2. Soit F le sous-espace de E formé des $x = (x_n) \in E$ tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0$. Montrer que $F = \overline{F} \neq F^{\perp\perp}$. Montrez qu'il n'existe pas de projection orthogonale sur le sous-espace fermé F.

Exercice 3: : Adjoint d'un opérateur. Soit H un espace de Hilbert et $u : H \to H$ un opérateur continu. Montrer que $\|u^*\| = \|u\|$ et que $\|u^* u\| = \|u u^*\| = \|u\|^2$. Montrer que $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et que $\overline{\mathrm{Im}\, u^*} = (\ker u)^\perp$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel fermé de H alors $p_F^* = p_F$. Montrez que u est un opérateur de projection orthogonale si et seulement si $u^2 = u = u^*$. Montrez que si H est un espace de Hilbert et si $u \in H$

est un opérateur non forcément continu qui admet un adjoint, alors u est forcément continu (utiliser le théorème du graphe fermé).

<u>Exercice 7:</u> : Projecteur orthogonal.

1. Soit E un espace de Banach et p un projecteur. Montrez que $\|p\| \geq 1$.
2. Soit E un espace euclidien. Montrez que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|p\| = 1$. Dans le sens difficile, on pourra pour $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \ker p$ faire tendre t vers 0 dans l'inégalité $\|x\|^2 \leq \|x + ty\|^2$.

<u>Exercice 8:</u> : Matrice de Gram. Soit H un espace de Hilbert, $(x_1; \ldots; x_n)$ une famille libre finie de H et F le sous-espace vectoriel qu'elle engendre. On appelle matrice de Gram de la famille (x_i) la matrice $\left(\langle x_i; x_j\rangle\right)_{i;j}$ que l'on note $G(x_1; \ldots; x_n)$.

1. Montrez que $\det G(x_1; \ldots; x_n) > 0$ (On pourra considérer une base orthonormale $(e_1; \ldots; e_n)$, considérer M la matrice de la famille $(x_1; \ldots; x_n)$ dans la base $(e_1; \ldots; e_n)$ et exprimer $G(x_1; \ldots; x_n)$ en fonction de M.
2. Soit $x \in H$. Montrez que

$$d(x; F) = \sqrt{\frac{G(x; x_1; \ldots; x_n)}{G(x_1; \ldots; x_n)}}:$$

On pourra écrire que $x = x - z + z$ où z est dans l'espace vectoriel engendré par $x_1; \ldots; x_n$ et $x - z$ est orthogonal à ce sous-espace vectoriel).

<u>Exercice 9.</u> Orthonormalisation de Gram- Schmidt. Soit E un espace euclidien, $(e_1; \ldots; e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $(f_1; \ldots; f_n)$ telle que, pour tout $j \in \{1; \ldots; n\}$, on ait

$$\operatorname{Vect}(e_1; \ldots; e_j) = \operatorname{Vect}(f_1; \ldots; f_j) \quad \text{et} \quad \langle f_j; e_j\rangle > 0:$$

De plus, $(f_1; \ldots; f_n)$ est définie par

$$g_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle f_j; e_{k+1}\rangle f_j$$

$$f_{k+1} = \frac{g_{k+1}}{\|g_{k+1}\|}:$$

Exercice 10: : Inégalité de Hadamard. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$. Montrez que

$$|\det(x_1,\dots,x_n)| \le \|x_1\|\dots\|x_n\|.$$

Exercice 11: : Théorème de Müntz-Szasz. On note C l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On utilisera sur $\mathbb{C}$ les deux normes suivantes :

$$\forall f\in C,\qquad \|f\|_2=\left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|.$$

Le but de cet exercice est de donner une condition nécessaire et suffisante sur une suite strictement croissante (λ_n) à valeurs positives pour que $\mathrm{Vect}(x^{\lambda_n})_n$ soit dense dans C.

1. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite à termes strictements positifs et strictement croissante.
   a. Soient $m\in\mathbb{R}^+$ et $N\in\mathbb{N}$. On note $E_N=\mathrm{Vect}_{1\le i\le N}(x^{\lambda_i})$. Montrer que

   $$\Delta_N(m)=\inf_{f\in E_N}\|x^m-f\|_2=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=1}^{N}\left|\frac{\lambda_i-m}{\lambda_i+m+1}\right|$$

   (On pourra utiliser les déterminants de Gram puis ceux de Cauchy).
   b. Montrez que si $\Delta_N(m)$ tend vers 0 pour tout m quand N tend vers $+\infty$ alors $\sum\frac{1}{\lambda_i}=+\infty$ (on pourra regarder les cas où (λ_n) est bornée ou non). Etudier la réciproque.
   c. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite (λ_n) pour que $\mathrm{Vect}(x^{\lambda_n})_n$ soit dense dans C pour la norme $\|\ \|_2$.
2. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite à termes positifs, strictement croissante, avec $\lambda_0=0$ et vérifiant $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n>1$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (λ_n) pour que $\mathrm{Vect}(x^{\lambda_n})_n$ soit dense dans C pour la norme $\|\ \|_\infty$.

On pourra aussi voir une preuve totalement différente dans le livre de W. Rudin : Real and Complex Analysis.