Agrégation de Mathématiques **2003-2004**
Université Aix-Marseille I **CMI**

Série 2: Topologie d'espaces fonctionnels. Topologie produit

Voir le cours dans, par exemple, Brezis p. 33–34, Vauthier-Prat p. 27–28, Pommellet p. 164–174 et Gourdon p. 220–233.

Problème. On se donne X un ensemble et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$. Notre but est de construire la topologie $\mathcal{O}$ ayant le moins d'ouverts possible et contenant $\mathcal{A}$. Cette topologie existe et est unique, et elle est donnée par la construction suivante :

- à $\mathcal{A}$, on adjoint $\emptyset$ et X. On note $\mathcal{A}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ obtenu.
- On note $\mathcal{A}''$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}'$.
- On note $\mathcal{A}'''$ l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{A}''$.

Alors, la topologie $\mathcal{O}$ cherchée est exactement $\mathcal{A}'''$. On l'appelle *topologie engendrée par la famille de parties* $\mathcal{A}$.

Topologie engendrée par une famille d'applications. Soit X un ensemble et une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'applications de X dans des espaces topologiques $(X_i,\mathcal{O}_i)_{i\in I}$. La *topologie engendrée par la famille d'applications* $(f_i)_{i\in I}$ est la topologie ayant le moins d'ouverts possible rendant continues les applications $(f_i)_{i\in I}$. En d'autres termes, c'est la topologie engendrée par la famille des parties $(f_i^{-1}(U_i))_{i\in I,\ U_i\in\mathcal{O}_i}$.

Une base d'ouverts est donnée par

$$f_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap\ldots\cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \qquad \text{pour } n\in\mathbb{N}^* \text{ et } U_{i_j}\in\mathcal{O}_{i_j} \text{ pour tout } j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Théorème. *Soit $(Z,\mathcal{T})$ un espace topologique et $f:(Z,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{O})$ une application où $\mathcal{O}$ est la topologie engendrée par la famille d'applications précédente. Alors*

$$f \text{ est continue si et seulement si,} \qquad \forall i\in I, \quad f_i\circ f : Z\to X_i \text{ est continue.}$$

Théorème. *Soit $(x_n)_n$ une suite de X. (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathcal{O}$ engendrée par la famille d'applications précédente si et seulement si, pour tout $i\in I$, la suite $(f_i(x_n))$ converge vers $f_i(x)$.*

Topologie produit et topologie de la convergence simple.

- Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On note $\prod_{i\in I}X_i$ et on appelle *produit des X_i* l'ensemble des applications $f:I\to\bigcup_{i\in I}X_i$ telles que $\forall i\in I$, $f(i)\in X_i$. Un tel élément de $\prod_{i\in I}X_i$ sera noté $(f(i))_{i\in I}$.

- Si $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques, la *topologie produit sur* $\prod_{i\in I} X_i$ est par définition la topologie engendrée par les projections

$$\begin{array}{rccc} \pi_k : & \prod_{i\in I} X_i & \to & (X_k, \mathcal{O}_k) \\ & (x_i)_{i\in I} & \mapsto & x_k \end{array}$$

pour k parcourant I.
- Une base d'ouverts pour cette topologie est donc

$$U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{i\in I\setminus\{i_1,\dots,i_n\}} X_i = \big\{(x_i)_{i\in I}, \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad x_{i_j} \in U_{i_j}\big\}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ et U_{i_j} sont des ouverts de X_{i_j}.
- Cette topologie est en fait celle de la convergence simple : les éléments de $\prod_{i\in I} X_i$ étant des fonctions $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ telles que, $\forall i \in I$, $f(i) \in X_i$, on a :

la suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\prod_{i\in I} X_i$ converge vers f si et seulement si,
$\forall i \in I$, la suite $(f_n(i))_n$ converge vers $f(i)$ dans X_i.

Exercice 1.

1. Soit $(X_n, d_n)_n$ une suite d'espaces métriques. Montrez que la topologie produit sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est métrisable et que cette topologie est par exemple induite par la distance

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

2. Soit X un ensemble et E un espace métrique. On suppose que $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est dénombrable. Montrez que la topologie de la convergence simple sur l'espace des fonctions définies sur X et à valeurs dans E est métrisable et donner une expression possible d'une distance associée à cette topologie.

Ce qui précède montre que la topologie de la convergence simple sur un ensemble dénombrable est métrisable. Le but de l'exercice suivant est de montrer que ce n'est plus le cas sur un ensemble non dénombrable.

Exercice 2. Soit X un ensemble non dénombrable, (E, d) un espace métrique ayant plus d'un élément. On fixe $a \in E$.

1. Soit A l'ensemble des fonctions $f \in E^X$ telles que l'ensemble $\{x \in X, f(x) \neq a\}$ soit fini. Montrez que A est dense dans E^X.

2. Soit B l'ensemble des fonctions $f \in E^X$ telles que l'ensemble $\{x \in X, f(x) \neq a\}$ soit fini ou dénombrable.

a. Soit (f_k) une suite d'éléments de B qui converge vers $f \in E^X$. Montrer que $f \in B$.

b. Montrer que B est dense dans E. En déduire que B n'est pas fermé dans E.

c. Conclure.

Topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions de E dans F bornées sur tout compact. On appelle *topologie de la convergence uniforme sur tout compact* la topologie dont une base de voisinages d'une fonction f est l'ensemble des $V(f,K,\varepsilon)$ où K parcourt l'ensemble des compacts de E, $\varepsilon > 0$ et où

$$V(f,K,\varepsilon) = \left\{ g \in \mathcal{F},\ \sup_{x \in K} d'(f(x),g(x)) \leq \varepsilon \right\}.$$

Exercice 3.

a. Montrez que tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle possède une suite exhaustive de compact, c'est à dire une famille de compacts (K_n) telle que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_n$. Pour cela, on prendra par exemple la suite

$$K_i = \left\{ x \in U,\ d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{1}{i} \right\} \cap \{\|x\| \leq i\}.$$

b. Montrez que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est métrisable.

Exercice 4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans (E,d) convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f. Montrer que pour toute suite (x_n) d'éléments de U qui converge vers x, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Exercice 5. :

1. Soit (E,d) un espace métrique. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],E)$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a,b],E)$. On suppose que f_n converge uniformément sur $]a,b[$ vers f. Montrer que f_n converge uniformément sur $[a,b]$. Si E est complet, montrer que c'est vrai sans supposer f continue.

2. Soit P_n une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est un polynôme.
3. Soit P_n une suite de polynômes de degrés $\leq m$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrez que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m. Est-ce vrai si on retire l'hypothèse portant sur le degré des polynômes ?

Exercice 6. *Théorèmes de Dini. Pommellet p. 168 ou Gourdon p. 229.*

1. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I alors la convergence est uniforme. On pourra considérer $\{x \in [a, b], 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon.\}$. Est-ce vrai si on supprime l'hypothèse de continuité portant sur f ?
2. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme. Est-ce vrai si on supprime l'hypothèse de continuité portant sur f ? On pourra considérer une subdivision de $[a, b]$ de pas suffisamment petit et utiliser la croissance des f_n.

Exercice 7. *Version faible du théorème d'Ascoli.* Soit (f_n) une suite de fonctions $M-$lipschitziennes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ où M est indépendant de n. Montrez que si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f, alors la convergence est uniforme. On pourra raisonner comme dans la question 2 de l'exercice précédent.

Exercice 8. Montrez que sur $\mathbb{R}_n[X]$, la topologie de la convergence simple et uniforme coïncident sur $[0, 1]$.

Exercice 9. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes convergeant simplement vers une fonction f sur l'intervalle I ouvert. Montrer que les $f - n$ et f sont continues. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment compact inclus dans I. On pourra pour cela considérer

$$x \mapsto \frac{f_n(x) - f_n(\alpha)}{x - \alpha} \text{ sur } [a, b] \text{ avec } \alpha \in I \setminus [a, b].$$

Exercice 10. Etudier la convergence sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions

$$f_n(x) = nxe^{-nx} \sin x.$$

<u>Exercice 11</u>. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles C^1 convergeant simplement vers f sur $[a, b]$. On suppose de plus que les moyennes de Césaro de f'_n convergent uniformément vers une fonction g. Montrer que f est dérivable de dérivée g.