Agrégation de Mathématiques **2003-2004**
Université Aix-Marseille I **CMI**

Série 3: Espaces métriques complets

Voir le cours dans Gourdon p. 19–27 et Pommellet p. 44-50.

Exercice 1.
1. Si X est ensemble et si $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{C}$, alors $(\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Montrez que si E est un espace vectoriel normé et si F est un espace de Banach, l'espace $(\mathcal{L}(E, F), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach.
3. Montrez que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.
4. Montrez que l'espace des suites convergeant vers 0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

Exercice 2. On munit l'espace $]0, +\infty[$ de la distance

$$\delta(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

1. Montrer que δ est bien une distance sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que cette distance définit sur $]0, +\infty[$ la même topologie que la topologie usuelle.
3. Montrer que l'espace métrique $(]0, +\infty[, \delta)$ n'est pas complet
4. On restreint la distance à $]0, 1]$. Montrer que $(]0, 1], \delta)$ est complet.

Exercice 3. *Prolongement de fonctions en un point.* Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : (E, d) \to (E', d')$. Soit $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. On dit que f admet une limite ℓ en a selon A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \alpha > 0, \qquad \forall x \in A, \qquad d(x, a) \leq \alpha \ \Rightarrow\ d'(f(x), \ell) \leq \varepsilon.$$

1. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$, que valent les limites en 0 de f selon $\mathbb{R}$? selon $\mathbb{R}^*$?
Si E est un intervalle I et si $a \in I$, on appelle limite à gauche la limite selon $I \cap]-\infty, a[$. De même à droite.
2. Montrez que f admet une limite en a selon A si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ admet une limite.

3. On suppose que (E, d') est complet. Montrez que f admet une limite en a selon la partie A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x, y \in A, \quad (d(a,x) \leq \alpha \text{ et } d(a,y) \leq \alpha) \\ \Rightarrow \ d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

4. *Application.* Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable à dérivée bornée. Montrer que f se prolonge par continuité à $[a, b]$.

5. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, le second étant complet, A une partie dense de E et $f : A \to E'$ une application uniformément continue. Montrez qu'il existe une unique application $g : E \to E'$ qui prolonge f et que de plus, g est uniformément continue.

<u>Exercice 4</u>. *Complété d'un espace métrique.* Soit (E, d) un espace métrique. Montrez en considérant l'application qui à $x \in E$ associe la fonction $f_x : y \in E \mapsto d(x,y) - d(y,a)$ où $a \in E$ est fixé qu'il existe un espace (E', d') complet et une application $j : E \to E'$ telle que j soit une isométrie bijective de E dans un sous-ensemble dense de E'.

Autre construction. On note C l'ensemble des suites de Cauchy $U = (u_n)$ de E.

1. **a.** Soient $U = (u_n)$ et $V = (v_n) \in C$. Montrer que la suite $(d(u_n, v_n))$ converge. On note $\delta(U, V)$ sa limite.

b. Montrer que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.

2. On considère la relation d'équivalence sur C définie par $U \sim V$ si et seulement si $\delta(U, V) = 0$. On note $\hat{E}$ l'espace quotient $C/\sim$ et $\hat{U}$ la classe d'équivalence dans $\hat{E}$ de $U \in C$.

a. Quelle est la classe d'équivalence d'une suite convergente dans E ?

b Montrer que si $U \sim U'$ et si $V \sim V'$, alors $\delta(U, V) = \delta(U', V')$. Lorsque $\hat{U}$, $\hat{V} \in \hat{E}$, le réel $\delta(U, V)$ est donc indépendant du choix des représentants U et V de $\hat{U}$ et $\hat{V}$. On le note $\delta(\hat{U}, \hat{V})$.

c. Ainsi définie, montrer que δ est une distance sur $\hat{E}$.

d. Montrer qu'il existe une injection naturelle $i : E \to \hat{E}$, isométrique, et que $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$.

3. Montrer que $\hat{E}$ est complet (on pourra considérer une suite $(\hat{U}_n)$ de Cauchy dans $\hat{E}$. Montrez que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in E$, $\delta(i(x_n), \hat{U}_n) \leq \frac{1}{n}$. En déduire que $(x_n) \in C$ et que $\hat{U}_n \to \widehat{(x_n)}$).

4. Soient (E_1, d_1), (E_2, d_2) deux espaces métriques complets tels qu'il existe une isométrie i_1 (resp. i_2) de E dans E_1 (resp. dans E_2) avec $i_1(E)$ (resp $i_2(E)$) dense dans E_1 (resp. E_2). Montrer l'existence d'une unique isométrie φ de E_1 dans E_2, bijective, et vérifiant $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$, pour tout $x \in E$.

<u>Exercice 5</u>. *Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.* On appelle *subdivision de* $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Une fonction $f : [a, b] \to E$ où E est un espace de Banach est dite *en escalier* s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. On dit alors que σ est adaptée à f.

Pour une fonction en escalier f et une subdivision adaptée σ, *l'intégrale de f sur* $[a, b]$ est donnée par la formule

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\lambda_k$$

où λ_k est la valeur constante de f sur $]x_k, x_{k+1}[$.

On dit qu'une fonction f est *réglée* si et seulement si f est limite uniforme de fonctions en escaliers.

1. Montrer que l'intégrale se prolonge sur l'espace des fonctions réglées.

2. Montrer que toute fonction continue est réglée.

3. Montrer qu'une fonction est réglée si et seulement si f admet des limites à droite et à gauche en tous points de $[a, b]$.

4. Montrez que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. Montrez que toute fonction monotone est réglée.

Exercice 6. : *Théorèmes de point fixe.*

1. Montrer qu'une application continue $f : [a, b] \to [a, b]$ possède un point fixe.

2. Montrer qu'une application croissante de $[a, b]$ dans lui même admet au moins un point fixe (considérer $\sup\{x,\ f(x) \geq x\}$). Est-ce vrai pour une fonction décroissante ?

3. Soit (E, d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ contractante, c'est-à-dire $k-$lipschitzienne avec $k < 1$. Montrez qu'il existe un unique point fixe a et que toute suite (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a (penser à la division euclidienne d'un entier par r).

4. On suppose maintenant que f^r, la composée de f r fois est contractante. Montrez qu'on a la même conclusion.

5. Soient (X, δ) et (E, d) deux espaces métriques, le second étant complet. On considère une application

$$F: \begin{array}{ccc} X \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & F(\lambda, x), \end{array}$$

continue et contractante en la seconde variable. Montrer que pour tout $\lambda \in X$, l'application $F(\lambda, \cdot) : x \mapsto F(\lambda, x)$ admet un unique point fixe, que l'on note x_λ. Montrer ensuite que l'application $X \to E$ $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

6. Soit (E, d) un espace métrique compact, $f : E \to E$ telle que

$$\forall (x, y) \in E, \qquad x \neq y \ \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrez que f possède un point fixe unique a et que toute suite (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a. On pourra montrer que la suite $d(x_n, a)$ est convergente.

7. Soit K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé, et $f : K \to K$ une application $1-$lipschitzienne. Montrer que f possède au moins un point fixe. On pourra considérer $f_n(x) = \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})f(x)$ avec $a \in K$ fixé.

Exercice 7. *Théorème de Cauchy-Lipschitz.* Soit l'équation différentielle

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad (*)$$

telle que

a. f est une fonction continue dans un voisinage V d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,

b. Il existe M tel que, pour tous (x, y_1) et (x, y_2) dans V, on ait

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq M\|y_2 - y_1\|.$$

Montrer qu'il existe un voisinage J de x_0 sur lequel $(*)$ possède une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$. (On étudiera sur l'espace $E = (C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), I = [x_0 - \frac{1}{4M}, x_0 + \frac{1}{4M}]$ la fonction

$$F(g)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt + y_0.)$$

Exercice 8. *Equation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.* Soit $K : (s, t) \mapsto K(s, t) \in \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$. Soit g une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. L'équation intégrale

$$f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)f(t)dt = g(s) \qquad (*)$$

où f est la fonction inconnue est appelée l'équation de Fredholm de deuxième espèce, et K est son "noyau". Montrez que pour λ assez petit, $(*)$ possède dans $E = ((C[a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ une solution unique f.

Exercice 9. Prouver que l'équation $g'(x) = g(x - x^2)$ possède au moins une solution C^∞ sur $[-1, 1]$ telle que $g(0) = 1$.

Exercice 10. *Théorème d'inversion locale.* Soit E un espace de Banach.

1. Soit $a \in E$, et g une application $k-$lipschitzienne définie dans la boule $B(a, r)$, nulle au point a. Montrez que, si $k < 1$, il existe un ouvert U contenu dans $B(a, r)$ tel que l'application $x \mapsto x + g(x)$ soit un homéomorphisme de U sur $B(a, (1 - k), r)$.

2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, et $a \in \Omega$. Montrez qu'il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $b = f(a)$ tel que f soit un C^1-difféomorphisme de U sur V si et seulement si la matrice jacobienne $Jf(a)$ de f en a est inversible.