Agrégation de Mathématiques **2003-2004**
Université Aix-Marseille I **CMI**

Série 4: Théorème de Baire et applications.

Voir Gourdon p. 391–400.

Exercice 1. : *Théorème de Baire.*
On dit qu'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est *de Baire* si et seulement si, pour toute suite $(O_n)_n$ d'ouverts denses dans E, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est encore dense dans E.

1. Montrer qu'un espace métrique complet est de Baire. (*Indication :* Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Construire une suite de boules $B(x_n, r_n)$ telles que $\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x, \varepsilon) \cap O_0$, $r_n \to 0$ et $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_n$. Montrer ensuite que $(x_n)_n$ converge.)
2. Montrer qu'un espace métrique localement compact est de Baire.
3. Montrer que si $(F_n)_n$ est une suite de fermés d'intérieurs vides dans un espace de Baire, alors la réunion est d'intérieur vide.

Exercice 2. : *Dimension d'un espace de Banach.*
Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'est pas de dimension dénombrable. (*Indication* : Supposer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique et considérer F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_0, e_1, \dots, e_n$.)

Exercice 3. : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$. Montrez de deux manières différentes que f est un polynôme. (on remarquera qu'un ensemble non dénombrable dans $\mathbb{C}$ a un point d'accumulation).

Exercice 4. : Soit (x_n) une suite de réels dans $[0, 1]$ et $(y_n)_n$ une suite de réels. Montrer qu'il existe une fonction continue non constante f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tous $i, j \geq 1$, $f(x_i) \neq y_j$.

Exercice 5. : Soit E un sous-espace fermé de $L^1[0, 1]$. On suppose que, pour tout $f \in E$, il existe $p > 1$ tel que $f \in L^p[0, 1]$. Montrer qu'il existe $p > 1$ tel que $E \subset L^p[0, 1]$. On pourra définir

$$E_{k,n} = \left\{ f \in E \ ; \ \int_0^1 |f|^{1+\frac{1}{k}} \leq n \right\}$$

et montrer que $E_{k,n}$ est fermé dans L^1.

<u>Exercice 6</u>. : *Limites simples de fonctions continues.*

1. Montrer que l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est pas limite simple d'une suite de fonctions continues. (Si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant vers l'indicatrice de $\mathbb{Q}$, considérer pour $\varepsilon > 0$ les ensembles $F_n = \bigcap_{p\geq n} f_p^{-1}([-\varepsilon,\varepsilon]\cup [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]))$

2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Prouver que f est continue sur un ensemble dense de réels. En déduire que si une fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors g est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$. (Pour $a < b$, on utilisera $F_n = \{x \in [a,b] \mid \forall p \geq n,\ \forall q \geq n,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon\}$. Construire par récurrence une suite décroissante de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ et une suite d'entiers p_n telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset]a_n, b_n[$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq p_n$, $\forall q \geq p_n$, $\forall x \in [a_n, b_n]$, $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.)

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrez qu'il existe un intervalle d'intérieur non vide sur lequel f est lipschitzienne. On pourra montrer que si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f, alors il existe un intervalle d'intérieur non vide et il existe M tel que sur cet intervalle, on ait $|f_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 7</u>. :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. Montrer alors que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (On pourra considérer les ensembles $F_n = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \forall p \geq n,\ |f(px)| \leq \varepsilon\}$).

2. Soit Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}_+^*$. Prouver alors qu'il existe $T > 0$ tel que $nT \in \Omega$ pour une infinité d'entiers n. (On pourra considérer $O_n = \bigcup_{p\geq n} \frac{1}{p}\Omega$. Montrer que $]\alpha, \beta[\cap O_n \neq \emptyset$ en remarquant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}$ tels que $]A, +\infty[\subset \bigcup_{p\geq N}]p\alpha, p\beta[$.). En déduire une autre solution de 1.

<u>Exercice 8</u>. : *Fonctions continues dérivables nulle part.*

Soit $E = (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble

$$U_n = \left\{ f \in E \mid \forall t \in [0,1],\ \exists s \in [0,1]\cap]t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}[, \quad |f(t) - f(s)| > n|t - s| \right\}.$$

a. Montrer que U_n est ouvert (on pourra montrer que le complémentaire est fermé à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés).

b. Montrer que U_n est dense dans E (on pourra considérer $f(t) + \varepsilon \sin Nt$ et montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, il existe $s \in [0,1]$ tel que $\frac{2\pi}{N} \leq |s - t| \leq \frac{4\pi}{N}$ et tel que $|\sin(Nt) - \sin(Ns)| \geq 1$).

c. Montrer qu'il existe une fonction dans E qui n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

__**Exercice 9**__. : Si (E,d) est un espace métrique, on note int A l'intérieur d'une partie A de E. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est l'intersection des ouverts
$$\Omega_n = \bigcup_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{int}(f^{-1}(]y-1/n, y+1/n[)).$$

2. Montrer que $\mathbb{Q}$ ne peut être intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

3. Existe-t'il une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant $\mathbb{Q}$ comme ensemble de points de continuité ?

4. Montrer que, par contre, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} f(x) = 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ f(x) = \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \qquad \text{(fraction irréductible)}, \end{cases}$$
est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

__**Exercice 10**__. : *Théorème de Banach Steinhaus.*

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On suppose de plus que E est de Banach.

1. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que
$$\forall x \in E, \qquad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty.$$
Montrez que : $\quad \sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$. (On pourra considérer $F_n = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ \|T_i(x)\| \leq n\}$.)

2. En déduire que si T_n est une suite d'opérateurs continus convergeant simplement vers un opérateur T, alors T est continue de E dans F et
$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

__**Exercice 11**__. : *Fonctions continues différentes de leur série de Fourier.*

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont $2\pi-$péridiques et continues. pour tout $f \in C_{2\pi}$, on note
$$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-ipt}dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application

$$\ell_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}, \qquad f \mapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

On munit $\mathcal{C}_{2\pi}$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_\pi \leq t \leq \pi |f(t)|$.

a. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que ℓ_n est une forme linéaire continue et calculer sa norme $\|\!|\ell_n|\!\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\ell_n(f)$.

b. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|\!|\ell_n|\!\| = +\infty$. Conclure avec le théorème de Banach-Steinhaus.

Exercice 12. :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n_x)}(x) = 0$. On veut montrer que f est un polynôme. On pose :

$$F_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0\}, \quad \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n} \quad \text{et} \quad F = \mathbb{R} \setminus \Omega.$$

1. Soit (x_p) une suite de $\mathbb{R}$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(n_0)}(x_p) = 0$. Montrer que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

2. Montrez que les composantes connexes de Ω sont ouvertes.

3. Soit $]a, b[$ une composante connexe de Ω et $x_0 \in]a, b[$. Montrez qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit un polynôme P sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Soit $A = \{c \in]x_0, b] \mid \forall x \in [x_0, c]\ f(x) = P(x)\}$. Montrez que $\sup A = b$. En déduire que $f = P$ sur $]a, b[$

4. Montrez que F n'a pas de point isolé.

5. Supposons $f \neq \emptyset$.

5.1. Montrez qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $]a, b[\cap F \neq \emptyset$ et $]a, b[\cap F \subset F_{n_0}$.

5.2. Soit $x \in]a, b[\cap F$. En utilisant 4 et 1, montrez que, pour tout $n \geq n_0$, $f^{(n)}(x) = 0$.

5.3. Soit $x \in]a, b[\cap \Omega$. En utilisant le fait que la composante connexe Ω_x de Ω contenant x a une extrémité dans $]a, b[$, montrez que $f^{(n_0)}(x) = 0$.

5.4. En déduire une contradiction.

6. Conclure.