

Calcul différentiel I

1. Fonctions continues.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont des fonctions continues, est-ce que f est continue en (x_0, y_0) ?

Exercice 2. Si une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue lorsqu'on la restreint à toutes les droites passant par l'origine, est-elle continue à l'origine ?

2. Fonctions Différentiables.

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$. On dit que f est *différentiable en* $a \in U$ si et seulement si il existe une application linéaire continue φ de E dans F telle que

$$f(a + h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0$$

On note df_a l'application φ que l'on appelle *différentielle en* a . Si $v \in E$, on dit que f est *dérivable en* a selon le vecteur v si et seulement si l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + tv)$ définie dans un voisinage de 0 est dérivable. On note alors

$$f'_v(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Si $E = \mathbb{R}^n$, on appelle *dérivées partielles de* f les dérivées de f par rapport aux vecteurs de la base canonique. Ce sont aussi les dérivées des applications partielles

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

On les note $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, on appelle *matrice jacobienne* de f en a et on note $Jf(a)$ la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire $df(a)$. C'est aussi la matrice dont les colonnes sont les dérivées partielles de f .

Proposition et Définition. Si E est euclidien et f est à valeurs réelles, il existe un unique vecteur v tel que, pour tout $h \in E$,

$$\varphi(a)(h) = \langle v, h \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur E . On appelle ce vecteur le *gradient de* f en a et on le note $\nabla f(a)$. Si E est $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, alors

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Propriété. La différentielle d'une composée de fonctions est la composée des différentielles. Voir un énoncé précis dans tout ouvrage de base (exemple : [Go], Proposition 3 page 300)

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que l'on suppose différentiables. Montrer que $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f \circ g)'(t)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t, f(t, t))$ est dérivable et calculer φ' en fonction des dérivées partielles de f . Exemple pour vérifier : $f(x, y) = xy^2$.

Exercice 3. [Ro] *Identité d'Euler des fonctions homogènes.* Soient une fonction $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable en tout point, et k une constante réelle. Montrer que f est homogène de degré k c'est-à-dire que pour tout $t > 0$, et tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(tx) = t^k f(x)$, si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x).$$

On pourra dériver en t la fonction $t^{-k} f(tx)$.

Exercice 4. Est-ce que la dérivabilité de f selon tous les vecteurs en un point a entraîne la différentiabilité de f en a ? Et la continuité ? On pourra reprendre l'exemple donné par [Go] : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = y$ ou alors celui donné par [Po] page 268 : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 5. [Go], [Ro]

1. Soient E, F, G des evn, $f : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire continue. Montrez que f est différentiable sur $E \times F$ et calculez sa différentielle
2. Plus généralement, soient $E_1, \dots, E_p, F$ des evn et $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application multilinéaire continue. Montrez que f est différentiable et calculez sa différentielle.
3. **Différentiabilité de la fonction puissance des matrices.** Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(M) = M^p$ où $p \in \mathbb{N}$. Montrez que Φ est différentiable et calculez sa différentielle
4. **Différentielle de l'inverse d'un endomorphisme.**
 - a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $Inv : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ et qui à M associe M^{-1} est de classe C^∞ .
 - b. Soit E un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus inversibles de E dont l'inverse est continu. On munit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E de la norme classique

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

Montrez que $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$, que l'application $Inv : GL(E) \ni u \mapsto u^{-1} \in GL(E)$ est différentiable au point Id_E et calculez sa différentielle en ce point (on pourra montrer que si $\|u\| < 1$, alors $(Id_E - u)$ est inversible et son inverse est $\sum u^p$). Montrez que Inv est différentiable en tout point de $GL(E)$ et calculez sa différentielle.

5. **(Différentielle du déterminant).** Montrez que l'application déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe C^∞ et calculez sa différentielle au point I_n . En déduire que

$$d_M \det(H) = \text{tr}(\widetilde{M}H)$$

où $\widetilde{M}$ est la comatrice de M , c'est-à-dire la matrice $(D_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $D_{i,j}$ est $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice M à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j . (supposer d'abord M inversible et utiliser la densité des matrices inversibles).

3. Accroissements finis.

Cas d'une variable réelle (Rappels).

Théorème de Rolle. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Inégalité des accroissements finis. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si il existe M tel que, pour tout $c \in]a, b[$, on ait $|f'(c)| \leq M$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|.$$

Exercice 1. Prouver les trois théorèmes précédents.

Remarque. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux si f n'est plus à valeurs dans $\mathbb{R}$ (considérer par exemple $f : [0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$).

Par contre, l'inégalité des accroissements finis reste vraie si on remplace les valeurs absolues par des normes, comme le prouve le théorème suivant (par exemple [Go], page 72 ou [De], page 88) :

THEOREME (Inégalité des accroissements finis généralisée). Soit F un evn. Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Si pour tout $t \in]a, b[$, $\|f'(t)\| \leq g'(t)$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Corollaire (Inégalité des accroissements finis). Soit F un evn. Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si pour tout $t \in]a, b[$, $\|f'(t)\| \leq M$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$$

Et on a aussi le résultat suivant, dont la preuve est laissée en exercice (utiliser les sommes de Riemann): (cf. [Po], page 89)

Proposition. Si la fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est de classe C^1 où E est un espace de Banach et si

$$\forall x \in [a, b], \quad f'(x) \in C$$

où C est un convexe fermé, alors

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in C.$$

Exercice 2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c)$ soit colinéaire à $f(b) - f(a)$ (introduire la fonction $g(t) = \det[f(b) - f(a), f(t) - f(a)]$).

Cas de plusieurs variables.

THEOREME (Inégalité des accroissements finis). Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ où E et F sont deux evn et U un ouvert de E . Soit $(a, b) \in U^2$ tel que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U . Si f est continue sur $[a, b]$, différentiable en tout point de $]a, b[$ et s'il existe $M > 0$ tel que $\|df_c\| \leq M$ pour tout $c \in]a, b[$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|.$$

Exercice 3. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis généralisée, prouver ce théorème.

THEOREME. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ une application, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un evn. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et si elles sont continues en $a \in U$, alors f est différentiable en a et

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

où les dx_i désignent la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. A-t-on la réciproque du théorème précédent ?

Exercice 5. On se propose de montrer le théorème précédent.

1. Montrer qu'il suffit de montrer que

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = o(\|h\|)$$

quand $h \rightarrow 0$.

2. Montrer que

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n [f(a_1 + h_1, \dots, a_i + h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i, \dots, a_n)]$$

(l'écriture ci-dessus n'est pas cohérente, mais se comprend aisément).

3. A l'aide du théorème des accroissements finis en une variable, conclure.

4. Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Définition. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans un espace normé est de classe C^p si toutes les dérivées partielles de f d'ordre inférieur ou égal à p existent et sont continues.

Définition (matrice Hessienne). On appelle ainsi la matrice formée des dérivées partielles de f d'ordre 2 :

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Théorème de Schwarz. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que f admette des dérivées partielles $\partial^2 f / \partial x \partial y$ et $\partial^2 f / \partial y \partial x$, continues en un point (x, y) de U . Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Exercice 1. On se propose de prouver le théorème de Schwarz. Pour h et k assez petits, on pose

$$\delta(h, k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

En considérant la fonction

$$\varphi : X \mapsto f(X, y + k) - f(X, y)$$

et en appliquant 2 fois le théorème des accroissements finis, montrez l'existence de θ_1 et θ_2 dans $]0, 1[$ tels que

$$\delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k)$$

De même, montrez l'existence de θ_3 et θ_4 dans $]0, 1[$ tels que

$$\delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + \theta_3 h, y + \theta_4 k).$$

Conclure.

Exercice 2. Exemple de Péano. [Go] On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $(0, 0)$ associe $f(0)$ et qui à $(x, y) \neq (0, 0)$ associe

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 3. [Go] Montrez que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 et si $\varphi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application qui à (r, θ) associe $(r \cos \theta, r \sin \theta)$, l'application $F = f \circ \varphi$ est de classe C^2 et

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 4. [Po] Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Par le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$, déterminer la forme de f .

5. Formules de Taylor.

THEOREME (Formule de Taylor-Lagrange). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application de classe C^p sur U . Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[x, x + h] = \{x + th, t \in [0, 1]\}$ soit inclus dans U . Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x + h) = f(x) + \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] f(x) + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 f(x) + \cdots \\ + \cdots + \frac{1}{(p-1)!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^{p-1} f(x) + \frac{1}{p!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^p f(x + \theta h). \end{aligned}$$

avec la convention que

$$\left(h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \left(h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

ce qui nous donne, pour $k \in \{1, \dots, p\}$

$$\left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^k f(a) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(a),$$

par analogie avec la formule

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (a_1 + \dots + a_n)^k = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

Remarque. Attention, comme pour l'égalité des accroissements finis, ceci n'est vrai que pour les fonctions à valeurs réelles. Pour les fonctions à valeurs vectorielles, on dispose par contre de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral et de la formule de Taylor-Young.

THEOREME (Formule de Taylor avec reste intégral). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application de classe C^p sur U . Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[x, x+h] = \{x+th, t \in [0, 1]\}$ soit inclus dans U . Alors

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] f(x) + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^2 f(x) + \dots \\ &\quad + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{p-1} f(x) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^p f(x+th) dt. \end{aligned}$$

THEOREME (Formule de Taylor-Young). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application de classe C^p sur U . Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[x, x+h] = \{x+th, t \in [0, 1]\}$ soit inclus dans U . Alors

$$f(x+h) = f(x) + \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] f(x) + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^2 f(x) + \dots + \frac{1}{p!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^p f(x) + o(\|h\|^p).$$

Exercice 1. Prouver les théorèmes précédents (se ramener au cas d'une fonction d'une variable réelle en considérant $t \mapsto f(x+th)$).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^p . Montrez que

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \text{ et } F(x, x) = f'(x)$$

est de classe C^{p-1} .

Exercice 3 (Lemme d'Hadamard) [Go]. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ .

1. On suppose $f(0) = 0$. Montrez que l'on peut écrire

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

où pour tout i , $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞

2. Si de plus $df_0 = 0$, montrez que l'on peut écrire

$$f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j h_{i,j}(x)$$

où pour tout (i, j) , $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ .

6. Extrémas libres.

Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un ouvert U d'un evn. Soit $a \in U$.

- On dit que a est un *maximum global* de f si et seulement si pour tout $x \in U$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que a est un *maximum local* de f si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) \leq f(a)$.
- On définit de même les notions de minimum local ou global.
- On dit que a est un *extremum global* (*resp. local*) si et seulement si a est un minimum ou un maximum global (*resp. local*).

La proposition suivante est fondamentale et fournit une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'un point $a \in U$ soit un extremum local.

Proposition. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un ouvert U d'un evn et différentiable sur U . Soit $a \in U$. Si a est un extremum local de f , alors $df_a = 0$.

Remarque. La conclusion est fausse si f est différentiable sur un ouvert contenant U et si $a \in \partial U$. De plus, la condition nécessaire donnée précédemment n'est pas suffisante.

Cependant, moyennant des développements limités de f à l'ordre 2, il est possible de donner des conditions suffisantes :

Proposition. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $df_a = 0$. D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q(h) + o(\|h\|^2)$$

où

$$Q(h) = \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^2 f(x) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

Alors

- (i) Si f admet un minimum (*resp. maximum*) local en a , Q est positive (*resp. négative*).
- (ii) Si Q est définie positive (*resp. définie négative*) en a , alors f admet un minimum (*resp. maximum*) local en a .

Cas particulier de la dimension 2. Notations de Monge

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a).$$

On suppose $p = q = 0$.

- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local en a ;
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local en a ;
- si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum local en a (point selle ou point col)
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Exercice 1. Prouver les résultats énoncés précédemment.

Exercice 2. Etudier les extremas locaux et globaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. ([Go], [Po]) De même avec la fonction $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2y - xy^2 + xy \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. (Lemme de Rolle en dimension n) [Go]. Soit $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f|_{\mathbb{S}}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| < 1$ et $df_{x_0} = 0$.

Exercice 4. [Po] Montrer que la restriction d'une fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ à la boule unité présente au moins deux extrema. Prouver qu'aux points où le maximum est atteint, le gradient de f est soit nul, soit sortant (interpréter).

Exercice 5. Principe du maximum [Go]. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On définit le Laplacien de f par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

a. Si $\Delta f > 0$ pour tout $x \in U$, montrer que pour tout $x \in U$,

$$f(x) < \max_{y \in \partial U} f(y).$$

b. Si $\Delta f \geq 0$ pour tout $x \in U$, montrer que pour tout $x \in U$,

$$f(x) \leq \max_{y \in \partial U} f(y).$$

(pour $\varepsilon > 0$, considérer $g(x) = f(x) + \varepsilon(\sum_{i=1}^n x_i^2)$)

c. En déduire qu'il existe au plus une solution u du problème de Dirichlet $\Delta u = 0$ dans U et $u|_{\partial U} = f$ où f est continue sur ∂U .

Exercice 6. Exemples d'applications du théorème des extremas libres [Go]. (présentés comme applications du théorème des extremas liés dans [Go], alors que ce n'en sont pas !)

- a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $s > 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$ et on pose $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = s\}$. Etudier le maximum global de f restreinte à Γ . Retrouver ainsi l'inégalité arithmético-géométrique.
- b. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels > 0 tels que $a_1 + \dots + a_n = 1$ (avec $n \geq 2$). Démontrer que

$$\prod_{i=1}^n a_i (1 - a_i) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$$

7. Prolongements et compléments.

Exercice 1 (Dérivations) [Go] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note G_0^∞ l'ev des fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et de classe C^∞ . Soit L une application de G_0^∞ dans $\mathbb{R}$ telle que

- i. L est linéaire
- ii. pour tout $f, g \in G_0^\infty$, $L(fg) = f(0)L(g) + L(f)g(0)$
- iii. $L(1) = 0$

(On dit que L est une dérivation). Montrez qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $L(f) = f'_\xi(0) = df_0(\xi)$ pour tout $f \in G_0^\infty$ (on pourra utiliser le lemme d'Hadamard).

Exercice 2. (Fonctions convexes) [Po] Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe ssi

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

1. a. Montrer que f est convexe ssi, pour tout $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $f(tx + (1 - t)y)$ est convexe.
- b. Montrer que, si f présente un minimum local en a , elle atteint en fait son minimum global en a .
2. On suppose f convexe et C^1 .
- a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad (i) \quad \text{et} \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y - x \rangle \geq 0 \quad (ii)$$

- b. Prouver que (i) ou (ii) entraîne que f est convexe.
- c. En déduire que $\nabla f(a) = 0$ entraîne que f atteint son minimum global en a et en déduire l'existence de fonctions affines qui minorent f .
- d. Application : Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x - a\|^2$ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que l'application $x \mapsto \nabla f(x) + 2\varepsilon x$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose f convexe de classe C^2 . Montrer que pour tout $x \in \Omega$, la matrice Hessienne de f en x est symétrique et positive. Réciproque ?

Problème. Principe du maximum pour un opérateur elliptique. [QZ], [Ro]. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On note ∂U le bord de U . On se donne un opérateur différentiel linéaire L qui agit sur les fonctions u de classe C^2 dans U et à valeurs réelles grâce à la formule

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

où les fonctions $a_{i,j}$ et b_i sont continues dans $\overline{U}$. Dans tout le problème, L est un *opérateur elliptique uniforme* c'est-à-dire que la matrice $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \overline{U}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq c \|\xi\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire usuel $\langle \xi, \xi' \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \xi'_i$.

On rappelle que si $u \in C^2(U)$, $\nabla u(x)$ désigne le gradient de u en x , c'est-à-dire que c'est le vecteur de coordonnées

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$$

et la matrice Hessienne de $Hu(x)$ de u en $x \in U$ est la matrice symétrique

$$Hu(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Partie I.

1. Soit $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Montrez que

$$\sup_{\overline{U}} u \quad \text{et} \quad \inf_{\overline{U}} u$$

existent.

2. On suppose de plus qu'il existe $x_0 \in U$ avec

$$u(x_0) = \sup_{\overline{U}} u.$$

Montrez que $\nabla u(x_0) = 0$ et que la matrice Hessienne $Hu(x_0)$ est négative, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Hu(x_0)\xi, \xi \rangle \leq 0.$$

3. On rappelle qu'il existe une matrice P orthogonale telle que

$$PA(x_0)^t P = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où $A(x_0)$ désigne la matrice $(a_{i,j}(x_0))_{1 \leq i, j \leq n}$, ${}^t P$ désigne la transposée de P et $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. En faisant le changement de variable

$$y = x_0 + P(x - x_0)$$

et en notant $v(y) = u(x_0 + {}^t P(y - x_0))$, montrez que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y_k}(x_0).$$

4. Soit $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Dédurre des questions précédentes que $Lu > 0$ dans U implique que $\sup_{\overline{U}} u = \sup_{\partial U} u$.

5. Soit $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Montrez que $Lu \geq 0$ dans U implique que $\sup_{\overline{U}} u = \sup_{\partial U} u$. On pourra considérer pour $\varepsilon > 0$ et pour un $\lambda > 0$ bien choisi

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}.$$

Partie II.

1. Soit $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$. On suppose que $Lu \geq 0$ et qu'il existe un point $x^0 \in \partial U$ tel que $u(x^0) > u(x)$ pour tout $x \in U$. On suppose de plus qu'il existe un point $a \in U$ et $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon r soit incluse dans Ω et telle que $x^0 \in \partial B(a, r)$.

- a. On note $\vec{n}(x^0)$ le vecteur normal extérieur unitaire à la boule $B(a, r)$ au point x^0 . Montrez que

$$\langle \nabla u(x^0), \vec{n}(x^0) \rangle \geq 0.$$

On peut supposer sans perdre en généralité que le centre a de la boule est le point 0, ce que nous ferons dans la suite de l'exercice.

- b. Pour $x \in B(0, r)$, on pose, pour $\lambda > 0$ que l'on fixera plus tard

$$v(x) = e^{-\lambda \|x\|^2} - e^{-\lambda r^2}, \quad x \in B(0, r)$$

Montrez que

$$L(v) \geq e^{-\lambda \|x\|^2} (4c\lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \operatorname{tr} \mathbf{A} - 2\lambda \|\mathbf{b}\| \|x\|)$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice $(a_{i,j}(x))$, tr désigne la trace, et $\mathbf{b}$ est le vecteur

$$(b_1(x), \dots, b_n(x)).$$

En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall x \in B(0, r) \setminus \overline{B(0, r/2)}, \quad L(v) \geq 0.$$

- c. Montrez qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \partial B(0, r/2), \quad u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon v(x).$$

Montrez qu'on a de plus

$$\forall x \in \partial B(0, r), \quad u(x^0) \geq u(x) + \varepsilon v(x).$$

- d. On note $C = B(0, r) \setminus \overline{B(0, r/2)}$. Montrez que $L(u + \varepsilon v - u(x^0)) \geq 0$ dans C , que $u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0$ sur ∂C . En déduire que $u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0$ dans C .

- e. Montrez que

$$\langle \nabla u(x^0) + \varepsilon \nabla v(x^0), \vec{n}(x^0) \rangle \geq 0.$$

et que

$$\langle \nabla u(x^0), \vec{n}(x^0) \rangle > 0.$$

2. On se propose de montrer que si $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ où U est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ et si u atteint son maximum dans $\overline{U}$ en un point de U , alors u est constante dans U . Pour cela, on pose $M = \max_{\overline{U}} u$ et $W = \{x \in U, u(x) = M\}$. Supposons $W \neq U$ et posons $V = \{x \in U, u(x) < M\}$.
 - a. Montrez qu'il existe $y \in V$ tel que $d(y, W) < d(y, \partial U)$.
 - b. On considère la boule B de centre y et de rayon $d(y, \partial V)$. Montrez qu'il existe $x^0 \in W$ avec $x^0 \in \partial B$. Conclure.

8. Bibliographie.

- [Go] X. Gourdon, Les maths en tête
 [Po] A. Pommellet, Cours d'Analyse
 [QZ] H. Queffelec, C. Zuily, Éléments d'analyse
 [Ro] F. Rouvière, petit guide de calcul différentiel.