Agrégation de Mathématiques — **2005-2006**
Université Aix-Marseille I — **CMI**

Série 1: Nombres réels.

Exercice 1. Montrez que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. (Considérez, pour x réel la suite $E(nx)/n$ où E désigne la partie entière. Enfin $\sqrt{2} + \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Exercice 2. **[P], [M-T]** . Montrez que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que l'ensemble des matrices complexes de taille (n, n) ayant n valeurs propres distinctes est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3. *L'espace* $\overline{\mathbb{R}}$. **[G.An]** On pose, par définition, $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/(1 + |x|)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-\infty) = -1$ et $f(+\infty) = +1$. Montrer que $d'(x, y) = |f(x) - f(y)|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. L'espace métrique $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé la droite numérique achevée. Quelle est la topologie sur $\mathbb{R}$ induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}$? Vérifier que $\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 4. *Dénombrabilité* **[P]**

1. Montrez qu'un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une injection de cet ensemble dans $\mathbb{N}$.
2. Montrez que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable (utilisez par exemple $(p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$).
3. Montrez qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (construire une injection naturelle de cet ensemble dans $\mathbb{N}^2$).
4. Montrez que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (considérez par exemple $\phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \ni (x_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \in \mathbb{R}$).
5. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres réels algébriques, c'est-à-dire des réels racines de polynômes à coefficients entiers relatifs. Montrez que $\mathcal{A}$ est dénombrable. En déduire l'existence de nombres non algébriques, c'est-à-dire transcendants.

Exercice 5. **[P]** Montrez qu'un ouvert U de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (Sur U considérer la relation $x\mathcal{R}y$ ssi il existe un intervalle ouvert inclus dans U contenant x et y).

Exercice 6. : *Suites réelles et complexes.* Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs complexes.

1. Montrer que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \ell \neq 0$ implique que $\lim |u_n| = \infty$ (on pourra montrer qu'on peut se ramener au cas où (u_n) est une suite réelle et $\ell = 1$).
2. *Lemme de Césaro.* Montrer que si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{C}$, alors $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$ converge vers ℓ (se ramener au cas où ℓ=0). Réciproquement, si (v_n) converge vers ℓ, est ce que (u_n) converge vers ℓ ?
3. Montrez que si une suite de rationnels p_n/q_n tend vers un irrationnel, alors $\lim |q_n| = +\infty$ (raisonner par l'absurde : si ce n'est pas le cas, on peut extraire de (q_n) une suite bornée, ainsi que de (p_n), et donc on peut extraire une sous-suite de (p_n/q_n) qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs).

Exercice 7. *Théorèmes de Dirichlet et de Liouville.* **[P], [CFM], [G.Al]**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant $\{kx - E(kx) \mid k \in \{0, 1, \dots, n\}\}$, montrer qu'il existe p, q entiers, $1 \leq q \leq n$ tels que $|qx - p| \leq \frac{1}{n}$ (Principe des tiroirs : s'il y a $n+1$ nombres dans n intervalles, l'un de ces intervalles en contient au moins 2).

2. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers telles que (q_n) soit strictement croissante et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

(si x est rationnel, c'est facile. Sinon utiliser la question précédente et la question 3 de l'exercice 6).

3. Soit x un nombre algébrique irrationnel de degré n, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que $Q(x) = 0$. Montrez qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on ait

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\varepsilon}{q^n}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \qquad \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\varepsilon}{q^n}.$$

Montrez que x est transcendant. *Application :* Montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant.

Exercice 8. *Fonctions additives de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. **[P], [BBR]**.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrez que si f est continue, alors f est de la forme $x \mapsto ax$ (f est de cette forme sur $\mathbb{Q}$. Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

2. Même question si on suppose maintenant que f est seulement croissante.

3. Même question si on suppose maintenant que f est seulement bornée au voisinage de 0 (On pourra montrer que f est continue en 0 en s'inspirant de la preuve du fait qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés est continue si et seulement si elle est bornée sur un voisinage de 0).

4. Même question si on suppose maintenant que f est seulement dans L^1_{loc} (Intégrer par rapport à y l'identité $f(x + y) = f(x) + f(y)$).

5. Est-ce toujours vrai si on ne fait aucune hypothèse sur f ? (On considère la famille $(1, \sqrt{2})$ qui est $\mathbb{Q} - libre$. On la complète en une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$. On définit l'application $\mathbb{Q}-$linéaire f par $f(1) = 1$ et $f(e_i) = 0$ pour les autres éléments e_i de la base précédente (Une telle base est appelée base de "Hamel")).

Exercice 9. : *Sous-groupes additifs de* $(\mathbb{R}, +)$. **[P], [G.An]**

a. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de 0. Montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$ ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. (On pose $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha = 0$, G est dense. Sinon penser à faire la "division euclidienne" de x par α).

b. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrez que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

c. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrez que $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. (Montrez que si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, pour tout $\varepsilon \in]0, \inf(a, b)[$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $0 < ap - bq < \varepsilon$. Si $p < 0$ alors montrez qu'il existe $(p', q') \in \mathbb{Z}^2$ de même signe tels que $0 < ap' - bq' <$

$\frac{ap-bq}{K} < \frac{\varepsilon}{K}$ où $K = \max(|p|, |q|)$. Si p' et q' sont tous les deux négatifs, considérer $p'' = p - Kp'$ et $q'' = q - Kq'$.)

d. *Application.* Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\sin n$.

Exercice 10. **[R]** Trouver l'ensemble des points isolés et des points d'accumulation des ensembles suivants : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{1/n + 1/m,\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}^*\}$. (pour le dernier ensemble, on pourra montrer que, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}]$, l'intervalle $[\frac{1}{p+1} + \alpha, \frac{1}{p}]$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A.)

Exercice 11. **[G.An]** Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que tout point de A soit isolé. Montrez que A est au plus dénombrable (Montrez que, pour tout $a \in A$, il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \cap A = \{a\}$. Montrez qu'il existe $q_a \in \mathbb{Q}^n \subset B(a, \frac{r_a}{2})$ et que $a \in A \mapsto q_a \in \mathbb{Q}^n$ est injective).

Exercice 12. **[P]** Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\sin(\ln n)$, et de $\sin(n^\alpha)$ avec $0 < \alpha < 1$. (Pour tout $x \in [-1, 1]$, on peut construire explicitement une fonction $\varphi_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} \sin(\ln \varphi_x(n)) = x$. De même pour $\sin(n^\alpha)$.)

Exercice 13. : **[L]** Soit (u_n) une suite bornée telle que $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrez que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un segment (lemme du "petit train"). Soit $f : [0, 1]$ dans $[0, 1]$ continue. Soit (x_n) la suite définie par la donnée de $x_0 \in [0, 1]$ et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Prouver alors que (x_n) converge si et seulement si $\lim_n (x_{n+1} - x_n) = 0$.

Exercice 14. : **[L]** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la suite récurrente donnée par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, si (u_n) possède une unique valeur d'adhérence ℓ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 15. : **[L], [BBR]** Soit (u_n) une suite complexe bornée. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{u_{pn}}{p} \right) = 1$$

Montrez que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{p}{p+1}$ (Regarder les valeurs d'adhérences).

Exercice 16. : **[L], [QZ]** *Limites supérieures et inférieures.*

1. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée. On pose $u'_n = \sup\{u_k,\ k \geq n\}$. Montrez que (u'_n) converge. On note sa limite $\limsup u_n$. On définit de même $\liminf u_n$. On note $\mathrm{VA}(u_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n). Montrez que $\mathrm{VA}(u_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$. Montrez que $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence de (u_n) et que $\limsup u_n = \sup\ \mathrm{VA}(u_n)$. En déduire que (u_n) converge si et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$.
On note aussi parfois $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ les limites supérieures et inférieures de (u_n).
Montrez que $0 \leq u_n \leq M$ implique

$$0 \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \leq M,$$

et que pour toutes suites bornées (u_n) et (v_n), on a

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} (u_n + v_n) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} v_n.$$

A-t'on égalité en général ?

2. Soit (a_n) une suite réelle positive telle que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad a_{m+n} \leq a_m + a_n$$

Montrez que la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ existe et que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{n}\right) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{a_n}{n}\right).$$

(Ce résultat permet de montrer l'existence du rayon spectral d'un endomorphisme continu sur un espace vectoriel normé). On pourra fixer n, faire la division euclidienne de m par n et faire tendre m vers $+\infty$.

3. Soit $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler d'un entier $n \geq 2$. Montrer que

$$\liminf \frac{\varphi(n)}{n} = 0 \text{ et } \limsup \frac{\varphi(n)}{n} = 1.$$

4. Soit (u_n) la suite réelle donnée par $u_0, u_1 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}.$$

Montrez que (u_n) converge (montrez que (u_n) est minorée par $m > 0$).

5. Soit (a_n) une suite donnée de réels > 0. Soit (u_n) définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{a_n + \sqrt{u_n}}.$$

Montrez que (u_n) est bornée si et seulement si (a_n) est bornée, et que (u_n) converge si et seulement si (a_n) converge.

6. Etudier la suite

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Références.

[BBR] N. Bonnault, J.-F. Burnol, P. Roche ; Analyse, Math sup et Math spé, Exercices corrigés posés à l'oral des concours, Dunod.

[CFM] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot ; Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, (deuxième édition), Masson

[G.Al] X. Gourdon ; les maths en tête, Algèbre, Ellipses.

[G.An] X. Gourdon ; les maths en tête, Analyse, Ellipses.

[L] E. Leichtnam ; Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS, Tome Analyse, Ellipses

[M-T] R. Mneimné, F. Testard ; Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann

[P] A. Pommellet ; Agrégation de mathématiques, Cours d'Analyse, Ellipses

[QZ] H. Quéffélec, C. Zuily, Eléments d'Analyse.

[R] E. Ramis ; Exercices d'Analyse, Masson