Agrégation de Mathématiques **2006-2007**
CMI **Universités d'Aix-Marseille**

Calcul différentiel II

1. Théorème d'inversion locale.

Théorème d'inversion locale. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 où U est un ouvert. Si $x_0 \in U$ et si $Jf(x_0) \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage V de x_0 et un voisinage W de $f(x_0)$ tels que $f : V \to W$ soit un difféomorphisme de classe C^1.

Exercice 1. On se propose de prouver le théorème précédent.
1. Montrez qu'on peut supposer $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ et $Jf(x_0) = I_n$.
2. On pose $g(x) = x - f(x)$. Montrez qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in U$, $\|x\| \leq r$ implique $\|g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$.
3. En considérant pour $y \in \bar{\mathbb{B}}(0, \frac{r}{2})$, $g_y : \bar{\mathbb{B}}(0, r) \ni x \mapsto y + g(x) \in \bar{B}(0, r)$ (on montrera qu'elle est bien définie et qu'elle est contractive), montrez qu'il existe un unique $x \in \bar{\mathbb{B}}(0, r)$ tel que $f(x) = y$.
4. Montrez que l'application f^{-1} ainsi définie est continue (Indication : elle est même lipschitzienne de rapport 2) et différentiable (Indication : il suffit de le faire en 0) et que

$$J(f^{-1})(y) = [Jf(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Corollaire (Application ouverte). Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 où U est un ouvert et si pour tout $x \in U$, $Jf(x) \in GL_n(\mathbb{R})$, alors f est ouverte, *i.e.* l'image par f de tout ouvert de U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Corollaire (Inversion globale). Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est injective, de classe C^1 où U est un ouvert et si pour tout $x \in U$, $Jf(x) \in GL_n(\mathbb{R})$, alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 2. Prouver les corollaires.

Exercice 3. [Go]. En considérant $f : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{C}^*$, montrez qu'on ne peut pas s'affranchir de l'injectivité de f dans le théorème d'inversion globale.

Remarques [Go].
- Le théorème d'inversion locale est intuitif : en effet, si $Jf(a)$ est inversible et si x est proche de a, on a $f(x) \approx f(a) + Jf(a)(x-a)$ ce qui implique qu'on peut trouver, pour y proche de a, x tel que $f(a) + Jf(a)(x-a) = y$ et on aura $y \approx f(x)$.
- Le fait que, pour tout $x \in U$, $Jf(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ n'implique pas que f est injective (l'exercice précédent est un exemple. De même que l'exponentielle dans le plan complexe).

Exercice 4. [Po]. Soit $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Etudier la différentiabilité de f, donner sa martice jacobienne, son jacobien (déterminant de la matrice jacobienne) et l'ensemble des points critiques. Montrer que la restriction de f à l'ouvert $U = \{(x, y),\ x < |y|\}$ est un C^1-difféomorphisme sur son image.

Exercice 5. [Po]. Soit $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, x) \mapsto (e^{2x} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f est un $C^\infty-$différomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Exercice 6. [Po]. Montrez qu'il existe un voisinage U de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une fonction f continue de U dans V où V est un voisinage de I_n tels que, pour tout $A \in U$, $f(A)^2 = A$.

Exercice 7. [Ro]. Soit $f(x) = x + x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$ mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Que se passe-t-il ? (on pourra comparer les valeurs $f\left(\frac{1}{k+t}\right)$ pour k entier pair et $t = 0, 1/2$ et 1).

2. Théorème des fonctions implicites.

Théorème des fonctions implicites. Soient $n, m \geq 1$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$ de classe C^1. Soit $(a, b) \in U$. On suppose que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+m}}(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+1}}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+m}}(a,b) \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{R}).$$

Alors il existe A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a, B un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant b, C un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant $f(a,b)$ et $\varphi : A \times C \to B$ de classe C^1 telle que, pour tout $x \in A$ et pour tout $z \in C$, il existe une solution unique y de $f(x,y) = z$ et cette solution est $y = \varphi(x,z)$.

Exercice 1. On se propose de prouver le théorème des fonctions implicites à l'aide du théorème d'inversion locale (preuve la plus courante). Pour cela, on introduit $F : (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$. En décrivant de manière précise son domaine de définition et en lui appliquant le théorème d'inversion locale, conclure.

Corollaire. Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\partial f/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$. Il existe un intervalle ouvert $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, un intervalle ouvert $]f(x_0,y_0) - \gamma, f(x_0,y_0) + \gamma[$, un intervalle ouvert $]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$ et une application $\varphi :]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]f(x_0,y_0) - \gamma, f(x_0,y_0) + \gamma[\to]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$ de classe C^1 tel que, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et tout $z \in]f(x_0,y_0) - \gamma, f(x_0,y_0) + \gamma[$, l'équation $f(x,y) = z$ a une unique solution $y \in]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$ donnée par $y = \varphi(x,z)$. De plus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x,z)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x,z))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x,z))\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z) = 1.$$

Exercice 2. Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$ définit implicitement par $\text{Arc}\tan(xy) + 1 = e^{x+y}$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3. Montrer que, au voisinage de $(1, -1, 1)$ l'ensemble

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ x^2 + 3xy - 2y = 0\}$$

admet une représentation de la forme

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \\ x \in I \end{cases}$$

où I est un intervalle ouvert contenant 1. Calculez les dérivées de φ et ψ en 1 d'ordre 1 et 2.

Exercice 4. **[Go]** Soit $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \sin y + xy^4 + x^2$.

a. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que pour tout $x \in U$, $\varphi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ de l'équation $f(x,y) = 0$.

b. Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ au voisinage de 0.

3. Extrémas liés.

Théorème des extrémas liés. Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\Gamma = \{x \in U,\ g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ (restriction de f à Γ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $d_a g_1, \dots, d_a g_r$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que

$$d_a f = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_r d_a g_r.$$

remarques. [Go].
- La famille $d_a g_i$ étant libre, les multiplicateurs de Lagrange sont uniques.
- La condition U ouvert est essentielle.

Heuristique. Supposons $r = 1$. Faisons un dessin de Γ. Supposons f bornée sur Γ. Notons M la borne supérieure de M sur Γ. Pour certains $\varepsilon > 0$, la surface de niveau $S_{-\varepsilon} = \{x \in U,\ f(x) = M - \varepsilon\}$ coupe Γ de manière transverse. Pour tous les $\varepsilon > 0$, la surface de niveau S_ε ne coupe pas Γ. On conçoit alors que, pour le cas limite $\varepsilon = 0$, la surface de niveau S_0 est tangente à Γ en son point de contact a ce qui implique que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ si $\nabla g(a) \neq 0$. L'interprétation géométrique est analogue si $r > 1$.

L'idée de la preuve du théorème des extremas liés est la suivante : supposons $r = 1$ et $n = 2$. $\Gamma = \{(x,y) \in U,\ g(x,y) = 0\}$ et $f_{|\Gamma}$ extremale en un point $(a,b) \in \Gamma$. Si, au voisinage du point (a,b), on peut écrire, grâce au théorème des fonctions implicites, $\Gamma = \{(x, \varphi(x))\}$ où g est C^1, on est ramené à dire que la fonction $h : x \mapsto f(x, \varphi(x))$ admet un extremum local en a et donc que $h'(a) = 0$ ce qui implique que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\varphi'(a) = 0.$$

Or $g(x, \varphi(x)) \equiv 0$ donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\varphi'(a) = 0.$$

La seconde équation nous donne $\varphi'(a) = -\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \Big/ \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)$, et en reportant dans la première, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix} = 0$$

ce qui implique que $\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$.

Exercice 1. On se propose de prouver le théorème des extrémas liés.

1. Le prouver quand $r = n$.

2. Soit $s = n - r$ que l'on suppose ≥ 1. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ et on écrit les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x,y) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$. Montrer que, quitte à réordonner les variables, on peut supposer que

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq r} \neq 0.$$

3. En appliquant le théorème des fonctions implicites, conclure.

4. Prolongements et compléments.

Exercice 1. **[Go]** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $Id - f$ soit $k-$contractante avec $0 \leq k < 1$. On se propose de montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrez que f vérifie les hypothèses du théorème d'inversion locale.

2. En appliquant le théorème du point fixe à $x \mapsto x - f(x) + y$, montrez que l'application f est bijective.

3. Conclure.

Exercice 2. **(Applications dont la différentielle est orthogonale)** **[Go]** On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Jf(x) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'en fait f est une isométrie affine.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un ouvert U_a tel que $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ pour tous $x, y \in U_a$ (on pourra appliquer le théorème d'inversion locale).

2. Montrez que

$$\forall (x,y) \in U_a \times U_a \qquad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle Jf(x)h, Jf(y)k \rangle = \langle h, k \rangle.$$

En déduire que $Jf(x) = Jf(y)$.

3. Montrer que f est une isométrie affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3. **(Fonctions strictement monotones).** **[Go]** On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme et du produit scalaire euclidiens usuels. On dit qu'une fonction est strictement monotone ssi il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k\|x-y\|^2.$$

1. Montrez que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est strictement monotone si et seulement si il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle Jf(x)h, h \rangle \geq k\|h\|^2.$$

(pour montrer que la condition est suffisante, considérez la fonction $\varphi : [0,1] \ni t \mapsto \langle f(x+th), h \rangle$).

2. En utilisant le théorème d'inversion globale, montrez qu'il suffit de prouver que f est surjective.

3. Montrez que $f(\mathbb{R}^n)$ est complet dans $\mathbb{R}^n$. Conclure.

Exercice 4. **(Cas particulier du théorème d'Hadamard-Levy.)** **[Go].** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Jf(x) \in GL_n(\mathbb{R})$.
- $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

1. Montrez que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrez que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé. En déduire que f est surjective.

3. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrez que $f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble fini (utilisez le théorème d'inversion locale). On note m le cardinal de cet ensemble et $x_1, \ldots, x_m$ les antécédants de y par f.

4. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un voisinage V de y tel que $f^{-1}(V) \subset \cup_{1\leq i\leq m} B(x_i, \varepsilon)$.

5. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de y tel que

$$\forall z \in W, \qquad \text{Card } f^{-1}(\{z\}) = m.$$

6. En déduire que l'application $\mathbb{R}^n \ni z \mapsto \text{Card } f^{-1}(\{z\})$ est constante.

7. Si $f(0) = 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$, montrez que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque : le théorème d'Hadamard-Levy est l'énoncé suivant : Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

-f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

-f est propre (l'image réciproque de tout compact est un compact) et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $Jf(x)$ est inversible.

Preuve : [QZ] p 392 ou [Av] p. 131

Exercice 5. Réduction des formes quadratiques, version différentiable [Ro]. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de taille n et symétriques. Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto {}^tMA_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $d_{I_n}\varphi$ est surjective, et préciser son noyau.

2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $A \mapsto M$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, telle que $A = {}^tMA_0M$ pour tout $A \in V$. On pourra considérer l'ensemble F des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de φ à F.

Exercice 6. Equation de Burgers [Ro]. Etant données deux fonctions a et f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, on veut résoudre l'équation aux dérivées partielles de Burgers en la fonction inconnue $u(x, y)$:

$$a(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

avec $u(x, 0) = f(x)$.

1. Résoudre le système différentiel caractéristique

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(z) \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

avec les données initiales

$$x(0) = s, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = f(s)$$

où s est un paramètre.

2. Déduire de 1 une relation entre x, y et z indépendante de s et t. Montrer que cette relation définit localemen t z fonction implicite de (x,y), soit $z = u(x, y)$ et que cette fonction est solution de l'équation de Burgers.

3. Exemple. Calculer u lorsque $a(y) = u$ et $f(x) = 1 - x$.

Exercice 7. Directions principales d'une quadrique [Ro]. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$. Etudier les extremums de $f(x) = \|x\|^2$ sur la quadrique S d'équation $Q(x) = 1$, où Q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Théorème d'Hadamard via les extremas liés [Ro]. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. On note $f(v_1, \dots, v_n)$ le déterminant de la matrice dont les colonnes sont $(v_1, \dots v_n)$.

1. Montrer que le maximum de f sur l'ensemble

$$\|v_1\| = \cdots = \|v_n\| = 1$$

est atteint, et strictement positif.

2. Montrer par le théorème des extremums liés que, si le maximum de f est atteint en $(v_1, \dots, v_n)$, les v_i forment une base orthonormale de E.

3. En déduire l'inégalité d'Hadamard :

$$\det(v_1, \dots, v_n) \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|.$$

Exercice 9. Une partie de billard (extremas liés). [Ro]. Montrer qu'il existe sur un billard elliptique une trajectoire fermée à trois rebonds. On pourra rechercher un triangle de périmètre maximum inscrit dans l'ellipse

5. Bibliographie.

[Av] A. Avez, calcul différentiel, Masson
[Ca] H. Cartan, Calcul différentiel.
[Go] X. Gourdon, Les maths en tête
[Po] A. Pommellet, Cours d'Analyse
[QZ] H. Queffelec, C. Zuily, Eléments d'analyse
[Ro] F. Rouvière, petit guide de calcul différentiel.
Voir aussi beaucoup d'autres applications dans
[Le] Leichtnam, Exercices posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS
[GT] Gonnord-Tosel, thèmes d'analyse pour l'agrégation, Calcul différentiel.
La liste est loin d'être exhaustive.