Agrégation de Mathématiques **2005-2006**
Université Aix-Marseille I **CMI**

Série 2 : Suites réelles et complexes.

Exercice 1. *Le nombre e.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrez que ces deux suites sont adjacentes et que leur limite commune, e, est irrationnelle.

Exercice 2. *Comparaison des suites.* Montrez qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$n^\alpha = o(a^n)\ (\alpha \in \mathbb{R},\ a \in]1,+\infty[), \qquad \sqrt[n]{n^\alpha} \sim 1,\ (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \frac{a}{n!}^{\,n} = o(1),\ (a \in \mathbb{R})$$

$$n! = o(n^n), \quad \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}.$$

Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, a-t'on $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$? Si $u_n \sim v_n$, a-t'on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$? Si $u_n \sim v_n$, a-t'on $\ln u_n \sim \ln v_n$? et si v_n tend vers 0 ou $+\infty$?

Exercice 3. *Intégrales de Wallis et formule de Stirling.*

1. Montrez que $\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$ est convergente.
2. Calculer un équivalent de l'intégrale de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$ (on pourra montrer en intégrant par parties que nI_nI_{n-1} est constant).
3. En déduire la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 4. *Constante d'Euler γ.* Montrez que la suite de terme général $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est strictement décroissante et positive. On note γ sa limite.

Exercice 5. *Suites récurrentes.*

1. Etudier la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
2. Etude de la suite complexe définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ (utiliser la formule $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$).

Exercice 6. *Suites géométriques, arithmétiques, homographiques et linéaires.*

1. Etude de la suite complexe vérifiant $u_{n+1} = \frac{1}{1-u_n}$.
2. *Suite de Fibonacci.* Soit (u_n) donnée par $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = u_{n+1} + u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, $\lambda > 0$ et $u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}$. Expliciter u_n.

<u>Exercice 7</u>. ([G.An], [FGN], [CFM], [BF]) *Suite arithmético-géométrique et variantes.*

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) vérifiant $0 < v_0 < u_0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Etudier ces suites.
2. $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. On définit (u_n) et (v_n) par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n+v_n)$ et $\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right)$. Etudier ces suites.
3. On considère les suites (u_n) et (v_n) vérifiant $0 < u_0 \leq v_0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$. Etudier ces suites.

<u>Exercice 8</u>. ([G.An], [BBN]) *Suites de Viète.* Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$. Prouver que la suite définie par $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ est convergente et calculer sa limite.

<u>Exercice 9</u>. ([FGN], [G.An]) Etudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n \sin n}\right)$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $s \geq 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^s \sin(\pi \alpha n)}\right)$ diverge.

<u>Exercice 10</u>. ([G. An], [FGN], [P], [BBN]) Etudier la convergence de la suite définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ avec $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En donner un équivalent.

<u>Exercice 11</u>. ([FGN]) Soit $P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Montrer que P_n admet au plus une racine réelle a_n. Etudier la limite de a_n et en donner un équivalent.

<u>Exercice 12</u>. [BF] Trouver les quatre premiers termes du développement généralisé de la $n-$ième racine strictement positive de l'équation $\tan x = x$.

<u>Références.</u>

[BF] C. Beef, X. Fairbank, POX, Ellipses (1988).

[BBR] N. Bonnault, J.-F. Burnol, P. Roche ; Analyse, Math sup et Math spé, Exercices corrigés posés à l'oral des concours, Dunod.

[CFM] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot ; Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1, (deuxième édition), Masson

[FGN] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas ; Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 1, Cassini.

[G.An] X. Gourdon ; les maths en tête, Analyse, Ellipses.

[L] E. Leichtnam ; Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS, Tome Analyse, Ellipses

[P] A. Pommellet ; Agrégation de mathématiques, Cours d'Analyse, Ellipses