

Mathématiques Générales I

PARCOURS PEIP

PLANCHE 2 FONCTIONS USUELLES

corrigé partiel

Exercice 7.

Notons $\Delta = \arctan(a) + \arctan(b)$.

Puisque la fonction $\arctan$ prend ses images dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\Delta \in]-\pi, \pi[$.

De plus, si $a, b \geq 0$ et $ab > 1$, alors $a > \frac{1}{b} = \frac{1}{\tan(\arctan(b))} = \cotan(\arctan(b)) = \tan(\frac{\pi}{2} - \arctan(b))$. Or a et $\frac{\pi}{2} - \arctan(b)$ sont alors dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ et puisque la fonction $\arctan$ est croissante sur cet intervalle, on a $\arctan(a) > \frac{\pi}{2} - \arctan(b)$ et donc $\Delta > \frac{\pi}{2}$.

Par un raisonnement similaire, on a :

- si $a, b \geq 0$ et $ab = 1$: alors $\Delta = \frac{\pi}{2}$;
- si $a, b \geq 0$ et $ab < 1$: alors $0 \leq \Delta < \frac{\pi}{2}$;
- si $a, b \leq 0$ et $ab < 1$: alors $-\frac{\pi}{2} < \Delta \leq 0$;
- si $a, b \leq 0$ et $ab = 1$: alors $\Delta = -\frac{\pi}{2}$;
- si $a, b \leq 0$ et $ab > 1$: alors $\Delta < -\frac{\pi}{2}$.

Enfin, si a et b sont de signes contraires, alors $\arctan(a)$ et $\arctan(b)$ le sont aussi et $\Delta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Maintenant, si $ab = 1$, alors $\Delta = \pm \frac{\pi}{2}$ selon que a et b sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs.

Autrement, $\tan(\Delta)$ est bien défini et d'après la formule pour la tangente d'une somme, on a

$$\begin{aligned} \tan(\Delta) &= \frac{\tan(\arctan(a)) + \tan(\arctan(b))}{1 - \tan(\arctan(a)) \tan(\arctan(b))} \\ &= \frac{a + b}{1 - ab}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Mais d'après les différents intervalles d'appartenance remarqués précédemment, on en déduit que

- si $a, b \geq 0$ et $ab > 1$: alors $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$;
- si $a, b \leq 0$ et $ab > 1$: alors $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$;
- si $ab < 1$: alors $\Delta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Exercice 15.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Domaine de définition :

Pour que f soit définie, il faut que

i. $1 + \sin x$ soit non nul ;

ii. $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ soit positif.

Pour *i.*, il suffit que, à 2π près, x ne soit pas égal à $-\frac{\pi}{2}$. La condition *ii.* est toujours vérifiée puisqu'il s'agit d'un quotient de nombres positifs.

La fonction f est donc définie sur $D_f := \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

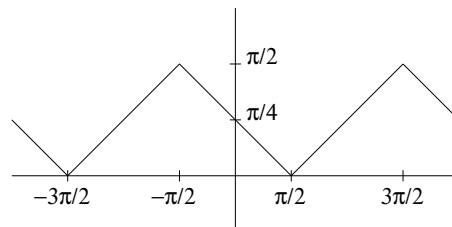
Dérivé :

La fonction f est une composition de fonctions toutes dérivables sauf $(t \mapsto \sqrt{t})$ qui ne l'est que sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc elle-même dérivable en tout point $x \in D_f$ tel que $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} \neq 0$, c'est à dire pour tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\left(\frac{\left(\frac{-(1+\sin x) \cos x - (1-\sin x) \cos x}{(1+\sin x)^2} \right)}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \right)}{1 + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}^2} \\
 &= - \frac{\left(\frac{\left(\frac{-2 \cos x}{(1+\sin x)^2} \right)}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \right)}{1 + \frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \\
 &= - \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2 \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \left(\frac{1+\sin x+1-\sin x}{1+\sin x} \right)} \\
 &= - \frac{\cos x}{2\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}} \\
 &= - \frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} \\
 &= - \frac{\cos x}{2\sqrt{\cos^2 x}} \\
 &= - \frac{\cos x}{2|\cos x|} \\
 &= - \frac{\text{signe}(\cos x)}{2}.
 \end{aligned}$$

La fonction f est donc affine par morceaux.

Graphe :



Exercice 16.

Soit la fonction g définie par $g(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$.

Domaine de définition :

La fonction $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$, il faut donc que l'on ait $-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$. Pour déterminer les valeurs de x auxquelles cela correspond, on étudie les variations du polynôme :

$$P: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x^3 - 3x \end{array}.$$

En calculant P' , on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	$1/2$	1	∞
P'		+	+	-	+	+
			1			∞
P		-1			1	
	$-\infty$			-1		

On en déduit que g est définie sur $[-1, 1]$.

Dérivé :

La fonction g est la composée d'un polynôme avec $(t \mapsto \arccos(t))$ qui est dérivable sur $] -1, 1[$. D'après le tableau de variations de P , elle est donc dérivable sur $] -1, 1[\setminus \{-1/2, 1/2\}$ avec

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{12x^2 - 3}{\sqrt{1 - (4x^3 - 3x)^2}} \\ &= -3 \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}} \\ &= -3 \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{(1 - x^2)(4x^2 - 1)^2}} \\ &= -3 \cdot \text{signe}(4x^2 - 1) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

En primitivant g' , on obtient que

- sur $] -1, -1/2[$, on a $g(x) = 3\arccos(x) + c_1$;
- sur $] -1/2, 1/2[$, on a $g(x) = 3\arcsin(x) + c_2$;
- sur $] 1/2, 1[$, on a $g(x) = 3\arccos(x) + c_3$,

où c_1, c_2 et c_3 sont trois constantes à déterminer. Or, $g(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 3\arcsin(0) + \frac{\pi}{2}$ donc $c_2 = \frac{\pi}{2}$. Et par continuité de g sur $[-1, 1]$, on en déduit, en évaluant en -1 et en 1 , les valeurs $c_1 = -2\pi$ et $c_3 = 0$.

Remarques :

1. On peut montrer (par exemple en dérivant) que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que sur $] -1/2, 1/2[$, on a aussi $g(x) = 2\pi - \arccos(x)$.
2. On peut arriver à la même conclusion sur g en remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(3x) = 4\cos^2 x - 3\cos x$.

Exercice 18.

Supposons que l'on a $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$. On a alors

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) = \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = \frac{x + 2x}{1 - 2x \cdot x} = \frac{3x}{1 - 2x^2} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

et donc, on a $3x = 1 - 2x^2$ ce qui signifie que x est racine du polynôme $2X^2 + 3X - 1$. Donc $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ ou $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$. Or, si x est négatif, $\arctan(x) + \arctan(2x)$ est également négatif et ne peut donc pas être égal à $\frac{\pi}{4}$. On en déduit que la seule solution éventuelle est $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Or, en notant f la fonction définie par $f(t) = \arctan(t) + \arctan(2t)$, on a $f(0) = 0 < \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi > \frac{\pi}{4}$. Donc par continuité de f , il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

On en conclut que $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

On suppose maintenant que l'on a $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tel que $\arccos(x) = \arcsin(2x)$. On a alors

$$x = \cos(\arcsin(2x)) = \sqrt{1 - (2x)^2}$$

et donc, en élevant au carré, $x^2 = 1 - 4x^2$, ce qui donne $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Or la fonction $\arccos$ prend ses valeurs dans $[0, \pi]$ et la fonction $\arcsin$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\arccos(x) = \arcsin(2x)$ est nécessairement dans $[0, \pi] \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [0, \frac{\pi}{2}]$, or $\arcsin(-\frac{2}{\sqrt{5}}) < 0$. La seule valeur éventuelle possible est donc $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Or, en notant g la fonction définie par $g(t) = \arccos(t) - \arcsin(2t)$, on a $g(0) = \frac{\pi}{2} > 0$ et $g(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$. Donc par continuité de g , il existe au moins une solution à l'équation $g(x) = 0$.

On en conclut que $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est l'unique solution de l'équation $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

On suppose enfin que l'on a $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ tel que $\arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(\frac{1}{x-3}) + \arctan(\frac{1}{x+3}) = \frac{\pi}{4}$.

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \tan(a+b+c) &= \frac{\tan(a+b) + \tan(c)}{1 - \tan(a+b)\tan(c)} = \frac{\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} + \tan(c)}{1 - \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\tan(c)} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) - \tan(a)\tan(b)\tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(b) - \tan(b)\tan(c) - \tan(a)\tan(c)}. \end{aligned}$$

En passant l'équation par la fonction $\tan$, on obtient donc

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} \frac{1}{x-3} \frac{1}{x+3}}{1 - \frac{1}{x} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3} \frac{1}{x+3}} = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{(x^2 - 9) + x(x+3) + x(x-3) - 1}{x(x^2 - 9)} = \frac{x(x^2 - 9) - (x+3) - (x-3) - x}{x(x^2 - 9)},$$

ou encore

$$x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = (x-5)(x^2 + 2x - 2) = 0,$$

dont les solutions sont $x = 5$, $x = -1 + \sqrt{3}$ et $x = -1 - \sqrt{3}$.

Il y a donc trois candidats possibles.

Déterminons maintenant le nombre de solutions en étudiant la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ par $h(t) = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \arctan\left(\frac{1}{t-3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{t+3}\right)$. La fonction h étant une composition de fonctions dérivables, elle est dérivable avec, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$:

$$h'(t) = \frac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} + \frac{-\frac{1}{(t-3)^2}}{1 + \frac{1}{(t-3)^2}} + \frac{-\frac{1}{(t+3)^2}}{1 + \frac{1}{(t+3)^2}} < 0.$$

La fonction h est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -3, 0[$, $]0, 3[$ et $]3, \infty[$ (l'intervalle $] -\infty, -3[$ ne nous intéresse pas puisqu'il ne contient pas de solution éventuelle). Or

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -3 \\ t > -3}} h(t) &= \frac{\pi}{2} - \arctan(1/3) - \arctan(1/6) & \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} h(t) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan(1/3) + \arctan(1/3) = -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} h(t) &= \frac{\pi}{2} - \arctan(1/3) + \arctan(1/3) = \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} & \lim_{\substack{t \rightarrow 3 \\ t < 3}} h(t) &= -\frac{\pi}{2} + \arctan(1/3) + \arctan(1/6) \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 3 \\ t > 3}} h(t) &= \frac{\pi}{2} + \arctan(1/3) + \arctan(1/6) > \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} & \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0 < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Mais d'après l'exercice 7, on a $\arctan(1/3) + \arctan(1/6) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{3 \cdot 6}}\right) = \arctan\left(\frac{9}{17}\right) < \frac{\pi}{4}$ puisque $0 < \frac{9}{17} < 1$. On en déduit que $\lim_{\substack{t \rightarrow -3 \\ t > -3}} h(t) > \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow 3 \\ t < 3}} h(t) < \frac{\pi}{4}$.

Au final, par continuité de h , on trouve une solution à l'équation $h(x) = \frac{\pi}{4}$ dans chacun des trois intervalles.

On en conclut que $-1 + \sqrt{3}$, $-1 - \sqrt{3}$ et 5 sont les trois seules solutions à l'équation $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 19.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} &= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} \\ &= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} \\ &= \operatorname{th}(x). \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1} x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

Pour $n = 0$, c'est la formule que nous venons de montrer.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 2^k \operatorname{th}(2^k x) &= 2^{n+1} \operatorname{th}(2^{n+1} x) + \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x) \\ &= 2^{n+1} \operatorname{th}(2^{n+1} x) + \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1} x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}, \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. Mais en appliquant le cas $n = 0$ à $2^{n+1}x$, on obtient $\text{th}(2^{n+1}x) = \frac{2}{\text{th}(2^{n+2}x)} - \frac{1}{\text{th}(2^{n+1}x)}$. Cela donne $2^{n+1}\text{th}(2^{n+1}x) = \frac{2^{n+2}}{\text{th}(2^{n+2}x)} - \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1}x)}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k \text{th}(2^k x) = \frac{2^{n+2}}{\text{th}(2^{n+2}x)} - \frac{1}{\text{th}(x)},$$

ce qui est bien la formule voulue au rang $n + 1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20.

Montrer cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a

$$\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{2} = \frac{(e^{x/2} + e^{-x/2})(e^{x/2} - e^{-x/2})}{2(e^{x/2} - e^{-x/2})} = \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^{x/2} - e^{-x/2})} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{2}{2(e^{x/2} - e^{-x/2})} = \frac{\text{sh}(x)}{2\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On suppose maintenant le résultat vrai au rang n . On a alors

$$P_{n+1}(x) = \text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^n \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) = \text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \frac{\text{sh}(x)}{2^n \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Mais en appliquant le cas $n = 1$ à $\frac{x}{2^n}$, on obtient $\text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$, ce qui donne

$$P_{n+1}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{2^{n+1} \text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)},$$

ce qui est bien la formule voulue au rang $n + 1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\text{sh}(t)}{t} = \frac{\text{sh}(t) - \text{sh}(0)}{t - 0}$. Or, puisque la fonction sh est une combinaison de fonctions exponentielles toutes dérivables en 0, la fonction sh est elle-même dérivable en 0 et un calcul direct montre que $\text{sh}' = \text{ch}$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(t)}{t}$ existe et vaut $\text{ch}(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(x) = \frac{\text{sh}(x)}{2^n \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\text{sh}(x)}{x} \frac{\frac{x}{2^n}}{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Or, quand n tend vers l'infini, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0. Donc, d'après ce qui précède et en posant $y = \frac{x}{2^n}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\text{sh}(y)}{y}} = 1$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x}.$$