Agrégation de Mathématiques **2005-2006**
Université Aix-Marseille I **CMI**

Série 3 : Séries numériques.

Exercice 1. ([Go]). *Comparaison des séries. Rappels.*

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Montrez que si $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ et si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge. Est-ce vrai si on retire l'hypothèse de positivité ?

2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives telles que $u_n \sim v_n$. Montrez que

a. Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et les restes vérifient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

b. Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

3. Montrez que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature.

4. *Application.* Montrez que si $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ alors $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 2. ([Go]) *Quelques critères pour les séries positives.*

1. *Critère de Riemann.* A quelle condition sur α la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ?

2. *Critère de Bertand.* A quelles conditions sur α, β la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ?

3. Soient u_n et v_n deux séries à termes strictements positifs, telles qu'à partir d'un certain rang, on ait $u_{n+1}/u_n \geq v_{n+1}/v_n$. Montrez que si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge. Montrez que si $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge.

4. *Critère de d'Alembert.* Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0 telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. Montrez que si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge. Montrez que si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge. Montrez que si la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 en restant supérieure à 1, alors $\sum u_n$ diverge.

5. *Critère de Cauchy.* Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0 telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$. Montrez que si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge. Montrez que si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge. Montrez que si la suite $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 en restant supérieure à 1, alors $\sum u_n$ diverge.

6. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictements positifs vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + a/n + o(1/n)}.$$

Montrez que si $a > 1$, la série converge et que si $a < 1$, elle diverge. Peut-on conclure si $a = 1$ (regardez les séries de Bertrand) ?

7. *Règle de Raab-Duhamel.* Soit (u_n) une suite à termes strictements positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + a/n + \mathcal{O}(1/n^2)}$$

Montrez qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.

Exercice 3. ([Go]) *Quelques critères pour les séries non forcément de signe constant.*

1. *Critère des séries alternées.* Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Montrez qu'alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge et que les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k$ vérifient $|R_n| \leq a_{n+1}$.
2. *Transformation d'Abel.* Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans un espace de Banach. On suppose que pour tout n, $u_n = \alpha_n v_n$ où (α_n) est une suite positive, décroissante et qui tend vers 0 et que la série $\sum v_n$ est bornée. Montrez que la série $\sum u_n$ est convergente. *Application.* Retrouvez le critère des séries alternées. Convergence de $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$?

Exercice 4. ([Po]) *Produits de Séries.*

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Si $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, alors $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ (supposer d'abord u_n et v_n à termes positifs).
2. Est-ce vrai si on ne suppose pas la convergence absolue ? (considérer le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$).
3. (*Cauchy-Mertens.*) Montrez que le résultat précédent subsiste si l'une des série est absolument convergente, et l'autre convergente.
4. Enfin, montrez que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries telles que $\sum w_n$ converge, alors la relation $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ reste vraie (suivre les indications du Pommellet p. 145 et l'autre preuve p. 234.)

Exercice 5. ([BF]) Nature des séries de terme général

$$\frac{1}{\ln \operatorname{ch} n}, \qquad n^{n^\alpha} - 1, \qquad \arccos\frac{1}{n} - \arccos\frac{1}{n^2}, \qquad \ln \operatorname{ch}\frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2$$

$$\frac{2^{n^2}}{n^{2^n}}, \qquad \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \qquad (-1)^n\frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \qquad \sin(\pi\sqrt{n^2+1}), \qquad \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$$

$$\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n), (\textit{remarquer que } (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N}) \qquad (1-\tanh n)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{n} dx, \qquad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$$

Exercice 6. ([Go]).

1. Soit $f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une application de classe C^1 telle que l'intégrale $\int_1^\infty |f'(t)|dt$ converge.
   - **a.** Montrez que la série $\sum f(n)$ a même nature que la suite $\int_1^n f(t)dt$.
   - **b.** *Application.* Lorsque $\alpha > 1/2$, donner la nature de la série
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}.$$
2. En généralisant la technique précédente, donner la nature de la série précédente lorsque $0 < \alpha < 1/2$.

Références.

[BF] C. Beef, X. Fairbank, POX, Ellipses (1988).
[Go] X. Gourdon ; les maths en tête, Analyse, Ellipses.
[P] A. Pommellet ; Agrégation de mathématiques, Cours d'Analyse, Ellipses