Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Parcours PEIP

Planche 3 Èquations différentielles

corrigé partiel

Exercice 10.

a) Les solutions, définies sur $\mathbb{R}$, sont de la forme $f(x) = \cos x(A - 2\cos x)$ avec $A \in \mathbb{R}$.

b) Les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $f(x) = \frac{x^3}{7} + \frac{A}{\sqrt{x}}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et celles définies sur $\mathbb{R}_-^*$ de la forme $f(x) = \frac{x^3}{7} + \frac{B}{\sqrt{-x}}$ avec $B \in \mathbb{R}$.

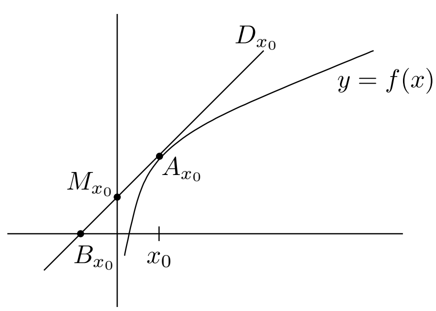
La fonction $f_0(x) = \frac{x^3}{7}$ est la seule définie sur $\mathbb{R}$ entier.

c) Les solutions, définies sur $\mathbb{R}$, sont de la forme $f(x) = 2 + \frac{A}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

d) Les solutions sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $[0, 1]$ et $]1, \infty[$ sont de la forme $f(x) = x + Ax(x-1)$ avec $A \in \mathbb{R}$. Les recollements sont toujours bien continus en 0 et 1 mais si l'on veut une solution sur $\mathbb{R}$ entier qui soit dérivable, alors les constantes A_-, A_0 et A_+ correspondant, respectivement, aux intervalles $]-\infty, 0[$, $[0, 1]$ et $]1, \infty[$ doivent être toutes égales. Au final, les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont, elles aussi, toutes de la forme $f(x) = x + Ax(x-1)$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 11.

Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour tout abscisse $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on note D_{x_0} la tangente à le courbe de f au point d'abscisse x_0, A_{x_0} le point de tangence entre D_{x_0} et le graphe de f, B_{x_0} le point d'interserction entre D_{x_0} et l'axe des abscisses et M_{x_0} le point d'interserction entre D_{x_0} et l'axe des ordonnées.



Puisque D_{x_0} est la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$ passant par le point $A_{x_0} = \big(x_0, f(x_0)\big)$, son équation est

$$D_{x_0} : y = f'(x_0)\big(x - x_0\big) + f(x_0).$$

On en déduit que $B_{x_0} = \Big(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\Big)$ et $M_{x_0} = \big(0, f(x_0) - f'(x_0)x_0\big)$.

Dire que M_{x_0} est le milieu du segment $[A_{x_0}, B_{x_0}]$, cela revient à dire que, en notant (x_P, y_P) les coordonnées de tout point P,

$$\left\{\begin{array}{l} x_{M_{x_0}} = \frac{x_{A_{x_0}} + x_{B_{x_0}}}{2} \\ y_{M_{x_0}} = \frac{y_{A_{x_0}} + y_{B_{x_0}}}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{x_0 + x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}{2} \\ f(x_0) - f'(x_0)x_0 = \frac{f(x_0)}{2} \end{array}\right. \iff f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{2x_0}.$$

Donc, si on veut que cette propriété soit vraie pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, il faut et il suffit que f soit solution de l'équation différentielle homogène de degré 1 $y'(x) - \frac{y(x)}{2x} = 0$. Il faut et suffit donc que f soit de la forme $f(x) = Ae^{\frac{1}{2}\ln(x)} = A\sqrt{x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 12.

a) La seule solution est $f(x) = \frac{1}{5}(4e^{-x} + e^{4x})$.

b) La seule solution est $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) - \frac{3}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right)$.

c) La seule solution est $f(x) = 3xe^{-\frac{x}{2}}$.

Exercice 13.

a) La seule solution est $f(x) = \frac{1}{6}(e^{-x} - 3e^{x} + 2e^{2x})$.

b) La seule solution est $f(x) = \frac{1}{4}\big(e^{4x}(x-1) + e^{2x}(x+1)\big)$.

c) La seule solution est $f(x) = \frac{4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{13}(1 - e^{-\frac{x}{2}}) + \frac{4\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{39}(6 - 7e^{-\frac{x}{2}})$.

Exercice 14.

a) Les solutions de (E_1) sont de la forme $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + A + Be^{-x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

b) On a

$$\begin{aligned}
g \text{ solution de } (E_1) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g'(x) = 1 + x^2 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \big(e^x f''(x) + 2e^x f'(x) + e^x f(x)\big) + \big(e^x f'(x) + e^x f(x)\big) = 1 + x^2 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, e^x\big(f''(x) + 3f'(x) + 2f(x)\big) = 1 + x^2 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = e^{-x}(1 + x^2) \\
&\iff f \text{ solution de } (E_2).
\end{aligned}$$

Les solutions de (E_2) sont donc de la forme $f(x) = e^{-x}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + A\right) + Be^{-2x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.

Dans tout cet exercice, on supposera que $\omega_0 \neq 0$.

a) Les solutions sont de la forme $f(x) = A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Pour avoir $f(0) = 0$, il faut $A = 0$ et f est alors de la forme $f(x) = B\sin(\omega_0 x)$. De fait, on a $f(\pi) = B\sin(\omega_0 \pi)$. Pour que cela s'annule il faut soit $B = 0$ mais f est alors identiquement nulle, soit $\omega_0 \in \mathbb{Z}$.

Au final, pour qu'il existe une solution non identiquement nulle s'annulant en 0 et en π, il faut que ω_0 soit un entier.

b) Le terme non homogène est en $\cos(\omega x)$, commençons donc par chercher une solution particulière sous la forme $f_0(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$. On a, dans ce cas, $f_0''(x) + \omega_0^2 f_0(x) = (\omega_0^2 - \omega^2)\big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\big)$.

Si $|\omega| \neq |\omega_0|$, on peut prendre $B = 0$ et $A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Les solutions de (E) sont alors toutes de la forme $f(x) = \frac{\cos(\omega x)}{\omega_0^2 - \omega^2} + A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Si $|\omega| = |\omega_0|$, il n'existe pas de solution sous cette forme. Par analogie avec le cas où les racines sont égales dans la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, on peut penser à chercher une solution particulière sous la forme $f_0(x) = x\big(A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)\big)$. Sinon, on peut également appliquer la méthode de la variation de la constante et chercher, puisque $(x \mapsto \cos(\omega_0 x))$ est solution de l'équation homogène associée (e), une solution particulière sous la forme $f_0(x) = \phi(x)\cos(\omega_0 x)$. En injectant f_0 dans (E), on obtient

$$\phi''(x)\cos(\omega_0 x) - 2\omega_0\phi'(x)\sin(\omega_0 x) = \cos(\pm\omega_0 x) = \cos(\omega_0 x).$$

Notre objectif est de trouver une solution particulière et non toutes les solutions, nous allons donc, *a priori*, nous placer sur les valeurs de x telles que $\cos(\omega_0 x) \neq 0$ puis nous vérifierons, *a posteriori*, que la solution obtenue est valide pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction ϕ' satisfait donc l'équation différentielle d'ordre 1 non homogène

$$y''(x) - 2\omega_0\tan(\omega_0 x)y(x) = 1. \tag{E'}$$

Appliquons une seconde méthode de la variation de la constante et cherchons ϕ' sous la forme

$$\phi'(x) = \psi(x)e^{\int_0^x 2\omega_0\tan(\omega_0 t)dt} = \psi(x)e^{-2\ln\left(\cos(\omega_0 x)\right)} = \frac{\psi(x)}{\cos^2(\omega_0 x)}.$$

En injectant cela dans (E'), on obtient $\frac{\psi'(x)}{\cos^2(\omega_0 x)} = 1$ ou encore $\psi'(x) = \cos^2(\omega_0 x) = \frac{1+\cos(2\omega_0 x)}{2}$. On peut prendre $\psi(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2\omega_0 x)}{4\omega_0}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \frac{x}{2\cos^2(\omega_0 x)} + \frac{\sin(2\omega_0 x)}{4\omega_0\cos^2(\omega_0 x)} &&= \frac{x}{2} + \frac{x\tan^2(\omega_0 x)}{2} + \frac{2\sin(\omega_0 x)\cos(\omega_0 x)}{4\omega_0\cos^2(\omega_0 x)} \\
& &&= \frac{1}{2\omega_0}\big(\omega_0 x + \tan(\omega_0 x) + \omega_0 x\tan^2(\omega_0 x)\big) \\
& &&= \frac{1}{2\omega_0}\Big(\tan(\omega_0 x) + x\omega_0\big(1 + \tan^2(\omega_0 x)\big)\Big).
\end{aligned}$$

On reconnait, dans la parenthèse à droite, la dérivé de $\big(x \mapsto x\tan(\omega_0 x)\big)$. On peut donc prendre $\phi(x) = \frac{x\tan(\omega_0 x)}{2\omega_0}$ et alors $f_0(x) = \frac{x\tan(\omega_0 x)\cos(\omega_0 x)}{2\omega_0} = \frac{x\sin(\omega_0)}{2\omega_0 x}$.

Les solutions sont donc toutes de la forme $f(x) = A\cos(\omega_0 x) + (\frac{x}{2\omega_0} + B)\sin(\omega_0 x)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.

a) Les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont toutes les deux solutions de (E).

b) On a $\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A(1-y)+By}{y(1-y)} = \frac{A+(B-A)y}{y(1-y)}$. Il faut donc prendre $A = B = 1$.

c) On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$, $\frac{y'(t)}{y(t)\left(1-y(t)\right)} = \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{1-y(t)}$ dont une primitive est $\ln|y(t)| - \ln|1-y(t)| = \ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right|$.

d) Cherchons maintenant les solutions non constantes de (E). Pour cela, on travaille sur un intervalle[1] tel qu'une solution f ne prenne ni la valeur 0, ni la valeur 1. Il en découle que $f(t)$ et $\big(1 - f(t)\big)$ sont de signe constant, mais aussi que $f(t)\big(1 - f(t)\big)$ ne s'annule pas sur cet intervalle.

On peut donc diviser (E) par $f(t)\big(1 - f(t)\big)$ et f vérifie alors $\frac{f'(t)}{f(t)\left(1-f(t)\right)} = 1$, ce qui, en primitivant, donne $\ln\left|\frac{f(t)}{1-f(t)}\right| = t + A$ avec $A \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $\left|\frac{f(t)}{1-f(t)}\right| = e^{t+A}$ ou encore que $|f(t)| = e^{t+A}|1 - f(t)|$.

[1] que l'on déterminera *a posteriori*. On vérifiera, également *a posteriori*, que les solutions trouvées ne prennent, en effet, jamais ni la valeur 0, ni la valeur 1.

Maintenant

si $y(t)$ est toujours supérieur à 1 : alors, $y(t) = e^{t+A}\big(y(t)-1\big)$ et donc $y(t) = \frac{-e^{t+A}}{1-e^{t+A}} = \frac{1}{1-e^{-t-A}}$, définie pour $t > -A$;

si $y(t)$ est toujours entre 0 et 1 : alors, $y(t) = e^{t+A}\big(1-y(t)\big)$ et donc $y(t) = \frac{e^{t+A}}{1+e^{t+A}} = \frac{1}{1+e^{-t-A}}$, définie pour $t \in \mathbb{R}$;

si $y(t)$ est toujours inférieur à 0 : alors, $-y(t) = e^{t+A}\big(1-y(t)\big)$ et donc $y(t) = \frac{e^{t+A}}{e^{t+A}-1} = \frac{1}{1-e^{-t-A}}$, définie pour $t < -A$.

Réciproquement, un calcul direct montre que toutes ces fonctions sont solutions de (E).

Exercice 18.

a) Les populations nulles et négatives ne nous intéresse pas, on peut donc se cantoner à étudier les solutions strictement positives.

On a $N = \frac{1}{h}$ et donc $N' = \frac{-h'}{h^2}$. En injectant cela dans l'équation vérifiée par N, on obtient, pour tout t,

$$\begin{aligned} \frac{-h'(t)}{h^2(t)} = \frac{2}{h(t)} - \frac{3}{2h^2(t)} \quad &\Longleftrightarrow \quad -h'(t) = 2h(t) - \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad h'(t) + 2h(t) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) La fonction constante égale à $\frac{3}{4}$ est solution particulière de l'équation satisfaite par h. On en déduit que h est de la forme $h(t) = Ae^{-2t} + \frac{3}{4}$, avec $A > -\frac{3}{4}$.

Il en découle que $N(t) = \frac{1}{Ae^{-2t}+\frac{3}{4}}$.

c) Lorsqu'on attend très longtemps, la population de rongeurs se stabilise à près de 133 rongeurs.

Exercice 19.

Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(1-x)$. La fonction f' s'exprime comme combinaison de fonctions dérivables, elle est donc elle-même dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable et, en dérivant l'égalité, on obtient

$$f''(x) = -f'(1-x).$$

En réutilisant l'égalité, on obtient

$$f''(x) = -f\big(1-(1-x)\big) = -f(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. On en déduit qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.

Mais alors $f'(x) = -A\sin(t) + B\cos(t)$ et

$$\begin{aligned} f(1-x) &= A\cos(1-x) + B\sin(1-x) \\ &= A\cos(1)\cos(x) + A\sin(1)\sin(x) + B\sin(1)\cos(x) - B\cos(1)\sin(x) \\ &= \big(A\sin(1) - B\cos(1)\big)\sin(x) + \big(A\cos(1) + B\sin(1)\big)\cos(x). \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, il faut donc $-A = A\sin(1) - B\cos(1)$ et $B = A\cos(1) + B\sin(1)$, c'est à dire, $B = A\frac{\sin(1)+1}{\cos(1)}$.

Les solutions sont donc tous les multiples de la fonction

$$f(x) = \cos(1)\cos(x) + \big(\sin(1)+1\big)\sin(x) = \sin(x) + \cos(1-x).$$