Série 4 : Suites et séries de fonctions. Séries entières.

Rappels. Si X est un ensemble et E un espace de Banach, une série de fonctions $\sum f_n$ à termes dans l'espace de Banach des fonctions bornées de X dans E muni de la norme infinie converge *normalement* si $\sum \|f_n\|_\infty < +\infty$. Il y a alors convergence uniforme sur X , mais la réciproque est fautive.

Si (E, d) et (E', d') sont deux espaces métriques, $x_0 \in E$ et f_n une suite d'applications continues en x_0 qui converge uniformément vers f sur E , alors f est continue en x_0 .

Si (f_n) est une suite de fonctions de classes C^1 de $[a, b]$ dans un espace de Banach E . On suppose que

- i. Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge
 - ii. La suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g .
- Alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe C^1 vérifiant $f' = g$.

Exercice 1. [Go] Montrez que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n], \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x > n$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$. (1ère méthode : $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1-\theta_x x)^2}$ avec $\theta_x \in [0, 1]$ grâce à la formule de Taylor-Lagrange. En déduire que $\sup_{x \in [0, \sqrt[n]{n}]} |f_n(x) - e^{-x}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et conclure. Deuxième méthode : théorème de Dini. Il pourra être utile de montrer que, pour $x \in [0, 1[$, $\ln(1-x) \geq -\frac{x}{1-x}$.)

Montrez que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $f : z \mapsto e^z$ (Développer f_n par la formule du binôme. En déduire que $|f_n(z) - e^z| \leq e^{|z|} - f_n(|z|)$.)

Exercice 2. [Go] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application

$$u_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}$$

- a. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue f mais que la convergence n'est pas uniforme (on pourra comparer à une intégrale).
- b. Montrer que la série de fonctions $\sum (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ tout entier mais que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$$

1. Etudier la convergence uniforme de la série $\sum u_n$
2. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \ln \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 4. On considère la série de fonctions de $C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ de terme général

$$u_n(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa somme S est continue. Trouver une relation simple entre $S(x)$ et $S(x+1)$. Trouver un équivalent de $S(x)$ aux voisinages de 0 et $+\infty$. Montrer que

$$S(x) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!} = \int_0^1 t^{x-1} e^{1-t} dt.$$

(on pourra décomposer en éléments simples).

Exercice 5. Soit

$$u_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^2 + 1}.$$

Etudier la nature de la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum u_n'$. La somme de la série $\sum u_n$ est-elle dérivable ?

Exercice 6. On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \arctan(n+x) - \arctan n$$

et on note S sa somme. Nature des convergences de $\sum u_n$ et $\sum u_n'$. Trouver une relation simple entre $S(x)$ et $S(x+1)$

Exercice 7. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Etudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f .
2. Trouver une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

4. Trouver un équivalent de f en 0 et $+\infty$ (utiliser la décroissance de f).

Exercice 8. [Go] Après avoir donné leur rayon de convergence, sommer les séries entières

$$\sum n^2 x^n \quad \sum \frac{x^n}{2n+1} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)} \quad \sum \frac{x^n}{n!} \cos(n\theta)$$

Exercice 9. [Go] Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence ≥ 1 . On suppose $b_n > 0$ pour tout n et que la série $\sum b_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

a. S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell$$

montrer que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \ell.$$

b. Si on suppose simplement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_0 + \dots + A_{n-1}}{n} = \ell$$

montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ell$.

c. (Application.) Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, montrer les équivalents

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n} \sim -\frac{\log(1-x)}{\log a} \quad (a \in \mathbb{N}, a \geq 2),$$

Exercice 10. [Go] Trouver le nombre de solutions entières de l'équation $p + 2q + 3r = 1\,000\,000$.

Exercice 11. [Go], [Po] Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-a, a[, \quad f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Montrer que f est développable en série entière sur $] -a, a[$ (commencer par traiter la fonction $F(x) = f(x) + f(-x)$).

Références.

[Go] X. Gourdon ; les maths en tête, Analyse, Ellipses.

[P] A. Pommellet ; Agrégation de mathématiques, Cours d'Analyse, Ellipses