Université de Provence	2010–2011

Mathématiques Générales I

Planche 6

Nombres réels. Suites réelles.

Nombres réels.

Exercice 1. Mettre sous forme irréductible p/q les rationnels suivants (les chiffres soulignés se répètent indéfiniment) :

$$0,11\underline{1}\ldots \qquad 0,23\underline{23}\ldots \qquad 0,142857\underline{142857}\ldots \qquad 0,99\underline{9}\ldots$$

Exercice 2. Montrez que, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \qquad \min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Exercice 3. Dessiner l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

a. $\max(|x|,|y|) \leq 1$.

b. $|x|+|y| \leq 1$.

c. $1 \leq ||x+y|-|x-y|| \leq 2$.

Exercice 4.

1. Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, avec B majorée et $A \subset B$. Montrer que A est majorée et que sup(A) $\leq$ sup(B).
2. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Soit $A+B = \{x+y,\ (x,y) \in A \times B\}$. Que peut-on dire de $\sup(A \cup B)$? de $\sup(A+B)$?

Exercice 5. Soient E un ensemble et f, g deux applications de E dans $\mathbb{R}$ telles que $f(E)$ et $g(E)$ soient des parties majorées de $\mathbb{R}$. On note $\sup f$ la borne supérieure de l'ensemble $f(E)$. Que peut-on dire de $\sup(f+g)$?

Exercice 6. Dire si les ensembles suivants admettent majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure plus grand élément ou plus petit élément.

1. $[-1,1[\cup\{2\}$
2. $\left\{\frac{1}{x}|x \in \mathbb{R}_+^\star\right\}$
3. $\left\{1-\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}_+^\star\right\}$
4. $([-2,2[\cup\{3\}) \cap \{-1+2\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}|k \in \mathbb{N}\}$
5. $\{x^2+y^2|(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy \leq 1\}$
6. $\{(-1)^n + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\}$
7. $\{n+\frac{1}{p}; (n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2\}$

Suites réelles.

Exercice 7. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

a. La suite $(u_n)_n$ est bornée à partir d'un certain rang.

b. La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.

c. La suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice 8. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple. Dans tout l'exercice $(u_n)_n$ désigne une suite réelle.
a. Si $(u_n)_n$ est à termes positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_n$ est décroissante.
b. Si une suite réelle est encadrée par deux suites convergentes alors elle est convergente.
c. Si $(|u_n|)_n$ converge vers l, alors $(u_n)_n$ converge vers l ou vers $-l$.
d. Si $\lim u_n = l$ avec $l > 0$ alors $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.
e. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
f. La relation $(x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n \Leftrightarrow \lim(x_n - y_n) = 0$ est une relation d'équivalence.

Exercice 9. Déterminer si les suites suivantes sont croissantes ou décroissantes

1. $u_n := 2n + \sin(n)$.
2. $v_n := \frac{2^n}{n^2}$.
3. $w_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
4. $z_0 := 16\,, \quad z_{n+1} := \sqrt{z_n}$.
5. $a_n := \sqrt{n} + (-1)^n$.

Exercice 10. Etudier la convergence des suites suivantes et déterminer les limites (si existentes!)

1. $n \sin(1/n)$.
2. $n^4(\cos(n) - 2)$.
3. $2\cos(n) + 3(-1)^n - 3n$.
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
5. $\frac{3n+5(-1)^n}{2n}$.
6. $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; $n \geq 1$.
7. $\frac{\sqrt{(1-n)^2+1}}{1-n}, \quad n \geq 2$.
8. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; $n \geq 1$.

Exercice 11. (Suite géométrique)
Déterminer la convergence ou la divergence de la suite

$$u_n := a^n\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,$$

en fonction de la valeure de a.

Exercice 12. Soit $(u_n)_n$ la suite, définie par

$$u_0 := 5\,, \quad u_{n+1} := 2u_n - 3\,.$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 13. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Soit $u_0 \geq \sqrt{2}$. On définit la suite (u_n):

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Étudier la fonction f. Vérifier en particulier: $\forall x \geq \sqrt{2}, f(x) \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0, u_n \geq \sqrt{2}$.
3. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.
4. Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.
5. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 14. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1 \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1, \\ \qquad\qquad et \\ \qquad \lim u_n v_n = 1. \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et que $\lim u_n = \lim v_n = 1$.

Exercice 15. Soient $(u_n)_n = (\sqrt{n})_n$ et $(v_n)_n = (\ln n)_n$. Montrer que u et v tendent vers $+\infty$ et que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(v_{n+1} - v_n) = 0$.

En conclure que $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que $(a_n)_n$ soit convergente.

Exercice 16. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 17. Soit A un partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un majorant de } A \\ et \\ \text{il existe une suite d'élément de } A \text{ qui converge vers m.} \end{cases}$$

Exercice 18. On considère la suite $(u_n)_n$, définie pour $n \geq 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer qu'il existe c un nombre réel strictement positif que l'on précisera tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq c.$$

c. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.

Exercice 19. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par:

$a_0 = a$, $b_0 = b$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

a. Démontrer que $(a_n)_n$ est bien définie et croissante.

b. Prouver que $(b_n)_n$ est décroissante.

c. Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$. (*Cette limite commune est appelé moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.*)

Exercice 20. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Montrer les résultats suivants :

a. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge vers la limite commune.

b. Si $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent vers l, l', l'', alors $l = l' = l''$ et $(u_n)_n$ converge.

Exercice 21. Soit $(v_n)_n$ une suite strictement positive, croissante, qui converge vers $+\infty$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{v_k} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{v_n}.$$

a. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
b. Conclure la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 22. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ converge.

Exercice 23. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

a. Justifier que $(u_n)_n$ est bien définie.

b. Montrer que $(u_n)_n$ ne peut converger que vers un seul nombre l que l'on déterminera.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq l$.

d. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{P(u_n)}{\sqrt{1+u_n}+u_n}$, où P est un polynôme du second degré que l'on déterminera et dont on étudira le signe. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

e. Prouver que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 24. Soit x un réel. On définit $E(x)$ par:

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

a. Calculer $E(3)$, $E(1,5)$, $E(-1/10)$, $E(e)$.

b. Tracer le graphe de la fonction E.

c. Calculer $\lim nE\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. Démontrer que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

e. En déduire un encadrement de $E(x)$ en fonction de x.

f. Soit $x \in \mathbb{R}$; calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) \cdots + E(nx)}{n^2}.$$

g. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(E(u_n))_n$ converge.

Plus difficile

Exercice 25. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $E(x)$ la partie entière de x. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x+1) = E(x)+1$, que $x \in \mathbb{R} \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$ est croissante, et que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $E(x+y) \geq E(x)+E(y)$. Montrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{E(nx)}{n} - x| \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 26. Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots x_n \in [a, b]$. Soit $\ell = b - a$. Montrez qu'il existe i, j dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$ et tels que $|x_i - x_j| < \frac{\ell}{n-1}$.

Exercice 27. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant $\{kx - E(kx),\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$, montrez qu'il existe un entier relatif p et un entier naturel q compris entre 1 et n tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{nq}$.

Exercice 28. Soit (x_n) une suite bornée de réels. On pose : $\begin{cases} y_n = \sup\{x_p,\ p \geq n\} \\ z_n = \inf\{x_p,\ p \geq n\}. \end{cases}$

a) Montrer que les suites (y_n) et (z_n) convergent.

b) Montrer que (x_n) converge si et seulement si (y_n) et (z_n) ont même limite.

Exercice 29. a) Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers un nombre réels l. Montrer que la suite $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge vers l.
b) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ tel que $(u_n)_n$ diverge et $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge.
c) Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers l. Montrer que $(\frac{u_n}{n})_n$ converge vers l.

Exercice 30.

Etant donné α un nombre réel, on considère les deux suites $(u_n)_n = (\sin n\alpha)_n$ et

$(v_n)_n = (\cos n\alpha)_n$.

a) Expliciter ces suites si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$.

b) On suppose dans cette question que $(u_n)_n$ converge vers un nombre réel l non nul. En utilisant la suite $(u_{n+1})_n$, démontrer que $(v_n)_n$ converge et, à l'aide de $(u_{2n})_n$, que sa limite est $\frac{1}{2}$. En utilisant la suite $(v_{2n})_n$, conclure que cela est impossible.

c) On suppose dans cette question que $(u_n)_n$ converge vers 0. Montrer que $(v_n)_n$ converge vers 0. Justifier que cela encore est impossible.

d) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_n$. Puis à celle de $(v_n)_n$.