

Mathématiques Générales I

INDICATIONS ET SOLUTIONS POUR LA PLANCHE 7

GÉOMÉTRIE.

Exercice 1. Faire les produits vectoriels.

Exercice 2. Voir le cours de terminale.

Exercice 3. On peut écrire les équations ou écrire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \dots$

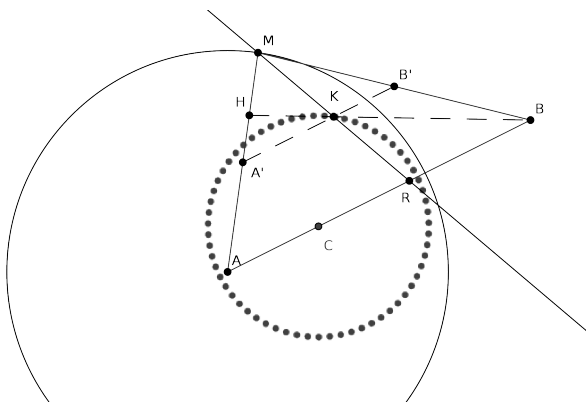
Exercice 4. Calculer normes de $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ et le produit scalaire.

Exercice 5.

1. Par définition du barycentre et si O désigne l'origine, on a $7\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OM}$
et $10\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OM}$.

Cela permet d'écrire $10\overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{OB} + 7\overrightarrow{OH}$, ce qui veut dire que K est le barycentre de $(H; 7)$; $(B; 3)$. Pour l'autre on peut utiliser $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OA'}$...

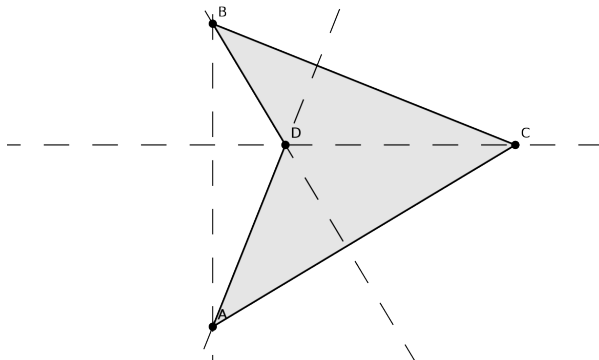
2. Un barycentre de 2 points appartient à la droite engendrée par les deux points.
3. L'homothétie de centre M et rapport 2 envoie A' sur A , B' sur B et K sur R . Elle préserve les barycentre, donc R est le barycentre de $(A; 2)$; $(B; 3)$.
4. Le point R est fixe, et K est toujours le milieu de $[RM]$. Donc K est l'image de M par l'homothétie de centre R et rapport $\frac{1}{2}$. Le point K va donc parcourir l'image du cercle par cette transformation, c'est-à-dire le cercle de centre C , le milieu de $[AR]$ (qui est aussi le barycentre de $(A; 7)$; $(B; 3)$) et de centre $\frac{r}{2}$.



Exercice 6. Il faut prendre un des produit scalaire et faire apparaître les autres. Par exemple

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD}$$

et on regroupe les trois derniers qui contiennent tous $\overrightarrow{CB}$. Les déductions viennent de la formule. Par exemple, pour un quadrilatère plan



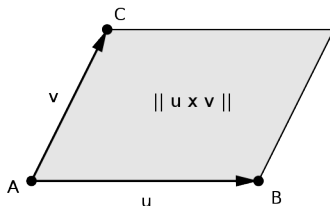
On interprète plus souvent cette égalité en disant que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (pourquoi?).

Exercice 7. (Extrait du DS n°4 posé en 2009-2010.)

1. Par exemple $\overrightarrow{AB} = |b - a|$.
2. $b - a = e^{i\alpha}(c - a)$
3. On supposeera $c \neq a$. En prenant le module, on obtient $|b - a| = |c - a|$ dans les deux cas. Donc le triangle est isocèle en A. Avec l'argument, on voit que l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\pm\frac{\pi}{3}$, et donc que le triangle est équilatéral. La réciproque est aussi vraie.
4. Donc le triangle est équilatéral ssi $\frac{b-a}{c-a} = \pm e^{i\frac{\pi}{3}}$. Comme $(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{i\frac{\pi}{3}}) = X^2 - X + 1$, c'est équivalent à dire que $\frac{b-a}{c-a}$ est racine de $X^2 - X + 1$. En écrivant cela, on trouve la condition annoncée.

Exercice 8. (Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.)

1. On calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires, avec ou sans produit vectoriel.
2. L'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. (sur le dessin on a utilisé la notation anglo-saxonne pour le produit vectoriel qui est un $\times$).



L'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme. on peut aussi exprimer l'aire du triangle A_T en fonction de l'angle θ entre les deux vecteurs. La formule est $A_T = \frac{AB \ AC |\sin \theta|}{2}$, ce qui permet de calculer $|\sin \theta|$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan contenant A, B et C , mais il n'est pas de norme un. par contre, le vecteur $\vec{n} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est bien de norme un et a la même direction que le produit vectoriel, donc il convient. Il reste à le calculer.

Exercice 9. (Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.)

1. Il faut chercher si des valeurs de s et t qui permettent d'obtenir les coordonnées des points O et A .
2. Les coefficients de s (ici $(0, 1, -1)$) dans la forme paramétrique donnent un vecteur du plan P (pourquoi?), et ceux de t (qui sont $(1, 0, 2)$) un autre. Ce sont bien des vecteurs du plan car changer s en $s + 1$ dans la forme paramétrique revient à translater par le premier vecteur. En prenant le produit vectoriel de ces deux vecteurs, on obtient un vecteur $\vec{n}_P = (2, -1, -1)$ normal au plan P . On peut alors en déduire l'équation cartésienne de P , car $M \in P$ ssi $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_P = 0$. C'est-à-dire

$$2x - y - z = 0$$

3. Le vecteur $\vec{n}_P$ est un vecteur directeur de cette droite. Les points de cette droite sont donc de la forme $A + t\vec{n}_P$, pour $t \in \mathbb{R}$, ce qui donne la description paramétrique suivante

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 10. (Extrait du DS n°3 posé en 2008-2009.)

1. Le vecteur $\vec{n}_P$ de coordonnées (a, b, c) est normal au plan, donc une équation paramétrique est

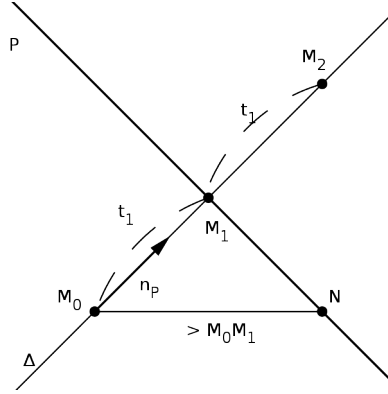
$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Notons M_1 le point d'intersection de D et P . En rentrant la forme paramétrique ci-dessus dans l'équation de P , on trouve une seule valeur de t qui convient, que l'on peut noter t_1 et qui vaut

$$t_1 = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cela permet de calculer les coordonnées de l'intersection.

3. La distance entre M_0 et (P) est la plus petite distance que l'on peut obtenir entre le point M_0 et un point N du plan (P) que l'on fait varier. On l'obtient toujours quand la droite (M_0N) est orthogonale au plan (P) . Ici, il faut donc choisir $N = M_1$ et la distance recherchée est donc la distance M_0M_1 . En effet, pour tout autre point du N du plan P , le triangle M_0M_1N est rectangle en M_1 et on a donc d'après Pythagore $M_0N^2 = M_0M_1^2 + M_1N^2 \geq M_0M_1^2$ (L'argument est d'ailleurs le même dans le cas de la distance d'un point à une droite, on peut alors le visualiser sur le dessin ci-dessous).



4. Le symétrique M_2 de M_0 vérifiera $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc sera le point de la droite D obtenu avec le paramètre $t = 2t_1$. Voir le dessin ci-dessus fait dans le cas où (P) est une droite, car la situation est très similaire.

Exercice 11. (Extrait du DS n°4 posé en 2008-2009.)

1. Les coordonnées des vecteurs directeurs sont données par les coefficients de t dans les deux expressions paramétriques. Et comme toujours pour trouver un vecteur $\vec{n}$ perpendiculaire aux deux droites, on utilise le produit vectoriel.
2. $\{H + s\vec{n} \mid s \in \mathbb{R}\}$ que l'on peut aussi écrire en coordonnées.

$$\Delta_H \begin{cases} x = 1 + t_H + s \\ y = 1 - t_H + 2s \\ z = t_H + s \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Pour que Δ_H croise D' , il faut que pour des valeurs de s et t , les points donnés par les description paramétrique de D' et Δ' soit les mêmes, et donc que le système de 3 équations à 2 inconnues (s, t) ci-dessous ait une solution.

$$\begin{cases} 2t = 1 + t_H + s \\ 1 = 1 - t_H + 2s \\ -2t = t_H + s \end{cases}$$

C'est possible seulement si $t_H = -\frac{1}{3}$. Cela donne les coordonnées de H . Pour trouver celles de H' , il faut résoudre le système pour cette valeur particulière de t_H .

3. On a un point H et le vecteur directeur, donc l'équation paramétrique est presque là.
4. C'est la distance HH' .