Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'Analyse

Test de Rentrée. Durée : 1h30

Exercice 1. 10mn, 4 points

On rappelle que la relation $a|b$ entre deux entiers relatifs signifie : "a divise b".

1. Soit a un entier naturel impair. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = a^{2^n} - 1$. Démontrer que $2^{n+1}|u_n$. (on pourra procéder par récurrence).

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $9|v_n$ où $v_n = 4^n + 15n - 1$.

Exercice 2. 10mn, 2points

Calculer les limites suivantes :

1.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}$$

Exercice 3. 15mn, 5points

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ? ou non ? justifier brièvement chaque réponse.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$.

Exercice 4. 10mn, 2points

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de :

$$x \mapsto \frac{3e^{2x} - 12}{e^{2x} - 7e^x + 10}.$$

Exercice 5. 10mn, 2points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\frac{e^x}{e^x - 1} = 2$.

2. $\dfrac{-e^{-3x}}{e^{2x}-2e^{x}+3}=1$. On pourra étudier le signe du trinôme X^2-2X+3 quand $X\in\mathbb{R}$.

Exercice 6. 15mn, 2 points

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$J_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx.$$

1. Par des considérations d'aires, montrer que $J_0=\frac{\pi}{4}$.

2. Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. (a) Montrer que pour entier naturel n,

$$0\leq J_n\leq\int_0^1 x^n dx.$$

(b) déterminer la limite de $(J_n)_n$.

Exercice 7. 10mn, 2points

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 avec $1+z_1z_2\neq 0$.

Démontrer que

$$Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$$

est réel.

Exercice 8. 15mn, 3points

1. Montrer que, pour tous points A, B, C et D de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

2. En déduire que, si dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont formés d'arêtes orthogonales, il en est de même du troisième.