Théorème des trois droites. Application à l'interpolation.

Références : Queffélec-Zuily, Andersson (Topics in complex analysis, Springer)

1. Théorème des trois droites.

Théorème des trois droites. *On note, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, $\mathbb{H}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C},\ a < \operatorname{Re} z < b\}$. Soit $f \in H(\mathbb{H}_{a,b}) \cap C(\overline{\mathbb{H}}_{a,b})$ telle que $|f(z)| \leq C$ dans $\overline{\mathbb{H}}_{a,b}$.*
On pose, pour $a \leq x \leq b$,

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x+iy)|.$$

Alors :

$$\forall x \in [a,b], \qquad M^{b-a}(x) \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}.$$

Preuve. Supposons $M(a) = M(b) = 1$. Posons, pour $\varepsilon > 0$,

$$h_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+\varepsilon(z-a)}$$

sur $\mathbb{H}_{a,b}$. Si $z = x+iy \in \mathbb{H}_{a,b}$, nous avons

$$|h_\varepsilon(z)| = \frac{1}{|1+\varepsilon(z-a)|} = \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon(x-a))^2+\varepsilon^2 y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon(x-a))^2}} \leq 1$$

car $x - a > 0$ et

$$|h_\varepsilon(z)| = \frac{1}{|1+\varepsilon(z-a)|} = \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon(x-a))^2+\varepsilon^2 y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 y^2}} = \frac{1}{\varepsilon|\operatorname{Im} z|}$$

On en déduit que la fonction fh_ε est bornée par C en module sur $\mathbb{H}_{a,b}$ et que

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \frac{C}{\varepsilon|\operatorname{Im} z|}.$$

En particulier, pour tout $R > 0$ assez grand, si $\mathbb{H}_{a,b}(R) = \{z \in \mathbb{H}_{a,b},\ |\operatorname{Im} z| < R\}$, nous avons $|fh_\varepsilon| \leq 1$ sur $\mathbb{H}_{a,b} \setminus \mathbb{H}_{a,b}(R)$. D'après le principe du maximum, nous avons $|fh_\varepsilon| \leq 1$ sur $\partial\mathbb{H}_{a,b}(R)$, donc $|fh_\varepsilon| \leq 1$ dans $H_{a,b}(R)$. On en déduit que $|fh_\varepsilon| \leq 1$ dans $\mathbb{H}_{a,b}$.
Enfin, faisant tendre ε vers 0, nous obtenons que $|f| \leq 1$ dans $\mathbb{H}_{a,b}$.

Supposons à partir de maintenant que $M(a) \neq 1 \neq M(b)$.
Posons

$$g(z) = M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}.$$

Montrons que la fonction $f(z)/g(z)$ est bornée. Si Re $z = x \in]a,b[$, nous avons

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{C}{M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}} = \frac{C}{\exp\left(\dfrac{b-x}{b-a}\ln M(a) + \dfrac{x-a}{b-a}\ln M(b)\right)}.$$

La fonction

$$x \in [a,b] \mapsto \frac{b-x}{b-a} \ln M(a) + \frac{x-a}{b-a} \ln M(b)$$

étant une fonction affine, elle est donc majorée et minorée sur $[a,b]$, et ceci entraîne que f/g est bornée sur $\mathbb{H}_{a,b}$.
Si Re $z = a$, nous avons

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{M(a)}{M(a)^{\frac{b-a}{b-a}} M(b)^{\frac{a-a}{b-a}}} = 1$$

et si Re $z = b$, nous avons

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{M(b)}{M(a)^{\frac{b-b}{b-a}} M(b)^{\frac{b-a}{b-a}}} = 1.$$

Il découle de ce qui a été fait quand $M(a) = M(b) = 1$ que $|f/g| \leq 1$ sur $\mathbb{H}_{a,b}$, donc que pour tout $z \in \mathbb{H}_{a,b}$, si Re $z = x$,

$$|f(z)| \leq |g(z)| = M(a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}.$$

et donc

$$\forall x \in]a,b[, \qquad M^{b-a}(x) \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}.$$

L'inégalité est bien entendu encore valable si $x = a$ ou $x = b$. Ceci achève la preuve du théorème des trois droites. □

2. Application à l'interpolation.

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $d\lambda$ la mesure de Lebesgue sur Ω.
On note $S(\Omega)$ l'ensemble des fonctions simples sur Ω, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, des nombres complexes non nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des ensembles mesurables deux à deux disjoints $U_1, \dots, U_n$ de mesure finie tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{U_i}.$$

(on rappelle que si A est un ensemble, χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A, c'est-à-dire la fonction qui vaut 1 sur A et 0 sur $\Omega \setminus A$).
On sait que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $S(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. (Attention ! c'est faux pour $p = \infty$).

Définition. Soit $T : L^1(U) \to L^\infty(\Omega)$ une application linéaire continue et soient p, q tels que $1 \leq p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On dit que T admet un prolongement continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ et on note $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in S(\Omega), \qquad \|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p.$$

En d'autres termes, si $T : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$, T est donc défini sur $S(\Omega)$, et la restriction de T à $S(\Omega)$ admet un prolongement continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.
Remarquons aussi, que si Ω est de mesure finie, alors pour $p \geq 1$ et $q \leq \infty$, nous avons $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ et les inclusions sont continues. On en déduit que T admet un prolongement continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. Ceci est par contre faux si Ω n'est pas de mesure finie.

Théorème d'Interpolation. *Soit $T : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ une application linéaire continue de norme M. On suppose de plus que T admet un prolongement continu de norme 1 de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.
Alors T admet un prolongement continu de norme inférieure ou égale à $M^{\frac{2-p}{p}}$ de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour tout $1 < p < 2$ et où q est le conjugué de p, c'est-à-dire que q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Preuve. Il suffit de montrer que si $f \in S(\Omega)$ vérifie $\|f\|_p = 1$, alors $\|Tf\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$.
Soit donc $f \in S(\Omega)$ telle que $\|f\|_p = 1$. Posons $h = T(f) \in L^\infty(\Omega)$.

Lemme. *Soit $h \in L^\infty(\Omega)$.*
$\|h\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$ si et seulement si, pour tout $g \in S(\Omega)$ avec $\|g\|_p = 1$, on a

$$\left|\int_\Omega hg\, d\lambda\right| \leq M^{\frac{2-p}{p}}.$$

Lors d'un développement oral, on peut admettre partiellement ce lemme en disant qu'il découle du fait que $L^q(\Omega)$ est le dual de $L^p(\Omega)$ que

$$\|h\|_q = \sup_{\substack{g\in L^p(\Omega)\\ \|g\|_p=1}} \left|\int_\Omega hg\, d\lambda\right|,$$

et que la densité de $S(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ permet dans l'égalité précédente de se restreindre au sup quand $g \in S(\Omega)$.

Grâce à ce lemme, il suffit pour prouver le théorème de montrer que si $p \in]1, 2[$ et si f et g sont deux éléments de $S(\Omega)$ tels que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, alors

$$\left|\int T(f)g\, d\lambda\right| \leq M^{\frac{2-p}{p}}.$$

A cette fin, nous introduisons la fonction de la variable complexe z

$$\phi(z) = \int_\Omega |g|^{zp-1} g T(|f|^{zp-1} f)\, d\lambda.$$

Nous allons montrer que ϕ est une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2},1}$, qu'on peut la majorer sur les droites Re $z = \frac{1}{2}$ et Re $z = 1$, puis appliquer le théorème des trois droites pour estimer $\phi(\frac{1}{p})$.

Montrons tout d'abord que ϕ est une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2},1}$. Soit $z \in \mathbb{H}_{\frac{1}{2},1}$.
Comme f et g sont des fonctions simples, il existe n et m deux entiers, des complexes non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_m$, des ensembles mesurables deux à deux disjoints $U_1, \ldots, U_n$ de mesure finie, des ensembles mesurables deux à deux disjoints $V_1, \ldots, V_m$ de mesure finie tels que

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{U_i} \qquad \text{et} \qquad g = \sum_{j=1}^m \mu_j \chi_{V_j}.$$

Nous avons alors

$$\phi(z) = \int_\Omega \left[\sum_{j=1}^m |\mu_j|^{zp-1}\mu_j\chi_{V_j} T\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^{zp-1}\lambda_i\chi_{U_i}\right)\right] d\lambda = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |\mu_j|^{zp-1}\mu_j|\lambda_i|^{zp-1}\lambda_i \int_\Omega \chi_{V_j}T(\chi_{U_i})\, d\lambda.$$

Or, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j = \{1, \ldots, m\}$, nous avons $\|\chi_{U_i}\|_1 = \lambda(U_i) < +\infty$ donc $\|T(\chi_{U_i})\|_\infty \leq M\lambda(U_i)$, ce qui entraîne que

$$\left|\int_\Omega \chi_{V_j}T(\chi_{U_i})\, d\lambda\right| \leq M\lambda(V_j)\lambda(U_i) < +\infty.$$

La somme étant finie, on en déduit que ϕ est holomorphe sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2},1}$, que

$$|\phi(z)| \leq M\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |\mu_j|^{p\,\mathrm{Re}\, z}|\lambda_i|^{p\,\mathrm{Re}\, z}\lambda(U_i)\lambda(V_j),$$

et comme
$$|\mu_j|^{zp-1}|\lambda_i|^{zp-1} = \exp\left((zp-1)\ln(|\mu_j\lambda_i|)\right)$$
est borné sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2},1}$ car $x \in [\frac{1}{2},1] \mapsto (xp-1)\ln(|\mu_j\lambda_i|)$ est une fonction affine donc majorée et minorée sur $[\frac{1}{2},1]$, on en déduit que ϕ est bornée sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2},1}$.

Majorons maintenant ϕ sur les droites Re $z=\frac{1}{2}$ et Re $z=1$.
Si Re $z=\frac{1}{2}$,
$$|\phi(z)| \leq \int_\Omega ||g|^{zp}| \left|T(|f|^{zp-1}f)\right| d\lambda = \int_\Omega |g|^{\frac{p}{2}} \left|T(|f|^{\frac{p}{2}-1}f)\right| d\lambda.$$
Or $|f|^{\frac{p}{2}-1}f \in L^2(\Omega)$, et $\left\||f|^{\frac{p}{2}-1}f\right\|_2^2 = \|f\|_p^p = 1$. De même, $|g|^{\frac{p}{2}} \in L^2(\Omega)$ et $\left\||g|^{\frac{p}{2}}\right\|_2^2 = \|g\|_p^p = 1$. On en déduit que
$$\begin{aligned}|\phi(z)| &\leq \left\||g|^{\frac{p}{2}}\right\|_2 \left\|T(|f|^{\frac{p}{2}-1}f)\right\|_2 \leq \left\||g|^{\frac{p}{2}}\right\|_2 \left\||f|^{\frac{p}{2}-1}f\right\|_2 \quad \text{(car } T : L^2(\Omega)\to L^2(\Omega) \text{ est continue de norme 1)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Si Re $z=1$,
$$|\phi(z)| \leq \int_\Omega ||g|^{zp}| \left|T(|f|^{zp-1}f)\right| d\lambda = \int_\Omega |g|^{p} \left|T(|f|^{p-1}f)\right| d\lambda.$$
Or $|f|^{p-1}f \in L^1(\Omega)$, et $\left\||f|^{p-1}f\right\|_1 = \|f\|_p^p = 1$. De même, $|g|^p \in L^1(\Omega)$ et $\||g|^p\|_1 = \|g\|_p^p = 1$. On en déduit que
$$\begin{aligned}|\phi(z)| &\leq \||g|^p\|_1 \left\|T(|f|^{p-1}f)\right\|_\infty\\ &\leq \||g|^p\|_1\, M \left\||f|^{p-1}f\right\|_1 \qquad \text{(car } T : L^1(\Omega)\to L^\infty(\Omega) \text{ est continue de norme } M)\\ &= M.\end{aligned}$$

On a alors, grâce au théorème des trois droites appliqué sur $H_{\frac{1}{2},1}$:
$$\left|\phi\left(\frac{1}{p}\right)\right|^{1-\frac{1}{2}} \leq 1^{1-\frac{1}{p}} M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},$$
soit encore $\left|\phi\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq M^{\frac{2-p}{p}}$. Or
$$\left|\phi\left(\frac{1}{p}\right)\right| = \left|\int_\Omega gT(f)\, d\lambda\right|.$$
Ceci termine la preuve du théorème d'interpolation. □

Annexe : Preuve du lemme. En effet, si $\|h\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$ et si $g \in S(\Omega)$ avec $\|g\|_p = 1$, grâce à l'inégalité de Hölder :
$$\left|\int_\Omega hg\, d\lambda\right| \leq \|h\|_q \|g\|_p \leq M^{\frac{2-p}{p}}.$$
Réciproquement, soit $h \in L^\infty(\Omega)$ tel que pour tout $g \in S(\Omega)$ avec $\|g\|_p = 1$, on ait
$$\left|\int_\Omega hg\, d\lambda\right| \leq M^{\frac{2-p}{p}}.$$

Montrons que $h \in L^q(\Omega)$ (ce qui n'est pas évident !) et que $\|h\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$.
Si $\|h\|_q = 0$, le résultat est donc prouvé.
Supposons $\|h\|_q \in]0,+\infty]$.
Si pour $k \in \mathbb{N}$, $B(0,k)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon k et $\Omega_k = \Omega \cap B(0,k)$, Ω_k est un ensemble de mesure finie.
Posons $h_k = h\chi_{\Omega_k}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h_k \in L^q(\Omega)$ car $h_k \in L^\infty(\Omega)$.
D'après le théorème de la convergence monotone, la suite $(\|h_k\|_q)_k$ est croissante et tend vers $\|h\|_q \in]0,+\infty]$, donc il existe un rang K à partir duquel $\|h_k\|_q > 0$.

Soit la suite $(g_k)_{k\geq K}$ définie pour $k \geq K$ par

$$g_k = \frac{\overline{h}_k |h_k|^{q-2}}{\|h_k\|_q^{q-1}}$$

(on rappelle que, comme $1 < p < 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a donc $q > 2$; la fonction g_k est donc bien définie, y compris aux points où h_k est nulle, et nulle en dehors de Ω_k).
Nous avons, pour $k \geq K$:

$$\|g_k\|_p^p = \frac{1}{\|h_k\|_q^{(q-1)p}} \int_\Omega |\overline{h}_k |h_k|^{q-2}|^p \, d\lambda = \frac{1}{\|h_k\|_q^{(q-1)p}} \int_\Omega |h_k|^{(q-1)p} \, d\lambda = 1$$

car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ équivaut à $(q-1)p = q$.
De plus, nous avons :

$$\left| \int_\Omega h_k g_k \, d\lambda \right| = \frac{1}{\|h_k\|_q^{q-1}} \left| \int_\Omega h_k \overline{h}_k |h_k|^{q-2} \, d\lambda \right| = \frac{\|h_k\|_q^q}{\|h_k\|_q^{q-1}} = \|h_k\|_q.$$

Comme $g_k \in L^p(\Omega_k)$ est nulle en dehors de Ω_k, il existe $g'_k \in S(\Omega_k)$ telle que $\|g_k - g'_k\|_{L^p(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$.
Nous avons alors

$$\begin{aligned}
M^{\frac{2-p}{p}} &\geq \left| \int_\Omega h g'_k \, d\lambda \right| = \left| \int_\Omega h_k g'_k \, d\lambda \right| \qquad \text{car } g'_k \text{ est nulle en dehors de } \Omega_k \\
&= \left| \int_\Omega h_k g_k \, d\lambda - \int_\Omega h_k (g_k - g'_k) \, d\lambda \right| \\
&\geq \left| \int_\Omega h_k g_k \, d\lambda \right| - \left| \int_\Omega h_k (g_k - g'_k) \, d\lambda \right| \geq \|h_k\|_q - \|h_k\|_q \|g_k - g'_k\|_{L^p(\Omega)} \geq \|h_k\|_q \left(1 - \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, nous obtenons $\|h\|_q \leq M^{\frac{2-p}{p}}$. Ceci termine la preuve du lemme. □

Applications à la transformée de Fourier. Soit $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$. La transformée de Fourier se définit sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la formule :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i \langle t,x \rangle} dt.$$

(*cf.* par exemple, le livre de Michel Willem, Analyse harmonique réelle).
$\mathcal{F}$ admet un prolongement continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de norme 1 et un prolongement continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est de norme 1 (c'est même une isométrie).
On en déduit que la transformée de Fourier admet un prolongement continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ de norme inférieure ou égale à 1 pour tout $p \in [1,2]$ et $q \in [2,+\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.
202. Exemples de parties denses et applications
207. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples
234. Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.
239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
240. Transformée de Fourier, produit de convolution. Applications.
245. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de$\mathbb{C}$. Exemples et applications.
247. Exemples de problèmes d'interversion de limites.

Extraire les points à exposer en fonction des leçons à illustrer.