

Chapitre 0

Rappels et notions de base

L'objet de ce chapitre est de rappeler des connaissances de premier cycle qui seront fondamentales dans la suite du cours. On rappellera en particulier la notion d'applications injectives, surjectives et bijectives, la notion de dénombrabilité d'un ensemble et la notion de borne supérieure d'un ensemble de réels.

1. Applications.

Nous commençons par rappeler la notion fondamentale d'applications, puis nous étudions les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité ainsi que les différents liens entre ces notions.

★ **Définition.** Soient E et F deux ensembles. On dit que f est une *application* de E dans F et on note $f : E \rightarrow F$ si et seulement si f est une correspondance qui à tout élément x de E associe un et un seul élément y de F noté $y = f(x)$. En termes plus précis, on dit que f est une fonction si et seulement si il existe un ensemble $G \subset E \times F$ (appelé graphe de f) tel que, pour tout x dans E , il existe un et un seul y dans F tel que $(x, y) \in G$. On dit aussi que $y = f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédant de y par f . (Attention ! il peut y avoir plusieurs antécédants ! seule l'image est unique). On notera F^E ou encore $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F .

★ **Notation.** Soit E un ensemble non vide. On appelle *identité de E dans E* et on note Id_E l'unique application qui à tout élément x de E associe x comme image. En d'autres termes :

$$\forall x \in E, \quad Id_E(x) = x.$$

1.1. Injectivité.

★ **1.1.1. Définition.** Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F . On dit que f est *injective* si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédant par f . En d'autres termes, f est injective si et seulement si

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

★ **1.1.2. Proposition.** Si E , F et G sont trois ensembles non vides, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications injectives alors $g \circ f$ est une application injective de E dans G .

Preuve. Laissez en exercice (cf. Exercice 0.1.)

Un exemple de fonction non injective...

1.2. Surjectivité.

★ **1.2.1. Définition.** Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est *surjective* si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédant. En d'autres termes, f est surjective si et seulement si

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

★ **1.2.2. Proposition.** Si E , F et G sont trois ensembles non vides, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications surjectives alors $g \circ f$ est une application surjective de E dans G .

Preuve. Laissez en exercice (cf. Exercice 0.2.)

Un exemple de fonction non surjective...

1.3. Injectivité et surjectivité.

★ **1.3.1. Proposition.** Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application. f est injective si et seulement si il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.

Preuve. Abrégée. Les compléments sont laissés en exercice (cf. Exercice 0.3.). Nous allons montrer que l'injectivité de f implique l'existence de g . Pour cela, on définit g de la manière suivante : soit y dans F ; si y a un antécédant x par f , celui-ci est unique car f est injective et on peut poser $g(y) = x$; si maintenant y n'a pas d'antécédant par f , alors on pose $g(y) = a$ où a est quelconque dans E . On vérifie aisément que $g \circ f = Id_E$. (le faire !). $\square$

★ **1.3.2. Proposition.** Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application. f est surjective si et seulement si il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

Preuve. Abrégée. Les compléments sont laissés en exercice (cf. Exercice 0.4.). Nous allons montrer que la surjectivité de f implique l'existence de g . Pour cela, on définit g de la manière suivante : soit y dans F . Si y a un antécédant unique x par f , on peut poser $g(y) = x$. Si maintenant y n'a pas d'antécédant unique par f , alors on en choisit un qu'on appelle a et on pose $g(y) = a$. On vérifie aisément que $f \circ g = Id_F$. (le faire !). $\square$

1.4. Bijectivité.

★ **1.4.1. Définition.** Soient E et F deux ensembles non vides, A une partie de E et B une partie de F . Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On note $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ et $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

★ **1.4.2. Définition.** Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de E dans F . On dit que f est *bijective* si et seulement si f est injective et surjective, soit

si et seulement tout élément de F a un et un seul antécédant par f . En d'autres termes, f est bijective si et seulement si

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = y.$$

★ **1.4.3. Proposition.** Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application. f est bijective si et seulement si il existe une unique application $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

Preuve. Laissée en exercice (cf. Exercice 0.5.)

★ **1.4.4. Définition.** L'unique application g vérifiant la conclusion de la proposition précédente est appelée *bijection réciproque* de f et est notée f^{-1} .

★ **1.4.5. Remarque.** Attention ! l'ensemble $f^{-1}(B)$ défini dans 1.4.1 existe toujours, même si f n'est pas bijective ! Par contre, si f est bijective vous pouvez vérifier (cf. Exercice 0.6.) que l'ensemble $f^{-1}(B)$ de 1.4.1 est aussi l'image directe de B par f^{-1} . En d'autres termes, $f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y), y \in B\}$.

2. Ensembles équipotents et dénombrables.

Dans ce paragraphe, nous introduisons en particulier la notion de dénombrabilité. Cette notion nous sera particulièrement utile dans la suite du cours quand nous voudrons par exemple construire des suites.

2.1. Ensembles équipotents.

Lorsque deux ensembles finis ont même cardinal, il n'est pas difficile de voir qu'il existe une bijection de l'un dans l'autre. Par contre, il est difficile de parler de cardinal d'un ensemble infini ou de dire que deux ensemble infinis ont même cardinal. La notion d'équipotence permet de remédier à cela.

★ **2.1.1. Définition.** Deux ensembles E et F sont dits *équipotents* si et seulement si il existe une bijection $f : E \rightarrow F$.

Nous avons alors la proposition dont la démonstration est encore laissée en exercice (cf. Exercice 0.7.) :

2.1.2. Proposition. Si E_1 et F_1 sont équipotents ainsi que E_2 et F_2 , alors $E_1 \times E_2$ et $F_1 \times F_2$ sont équipotents.

2.2. Ensembles dénombrables.

★ **2.2.1. Définition.** On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* si et seulement si E est fini ou équipotent à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

2.2.2. Remarque. Intuitivement, dire qu'un ensemble E est dénombrable revient à dire que l'on peut numérotter ses éléments, ou encore qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

★ **2.2.3. Exemples.** On vérifiera en exercice que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers pairs, l'ensembles des entiers impairs, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. On verra par contre que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables. Pour cela, voir les exercices 0.24, 0.29, 0.30 et 0.32.

3. Relations d'équivalence.

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion générale de relation d'équivalence. Les relations d'équivalences sont utiles en analyse dans le sens qu'elles permettent de regrouper des éléments ayant en commun une propriété.

Dans toute la suite, E sera toujours un ensemble.

3.1. Relations et relations d'équivalence

★ **3.1.1 Définition.** On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation sur E* si et seulement si, pour tous éléments x et y de E , on a x qui est en relation avec y ou bien x qui n'est pas en relation avec y (il s'agit d'une *relation binaire*). Si x est en relation avec y , on notera $x\mathcal{R}y$ (et $x\not\mathcal{R}y$ sinon). En d'autres termes, $\mathcal{R}$ est une relation si et seulement si il existe une application $f : E \times E \rightarrow \{0, 1\}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x, y) = 1.$$

★ **3.1.2. Définition.** On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E est une *relation d'équivalence* si et seulement si

- (i) $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$ (réflexivité)
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ (symétrie)
- (iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (transitivité)

3.1.3. Exemple. Considérons comme ensemble une classe composée d'étudiants. On dit qu'un étudiant x est en relation avec un étudiant y si et seulement si ils ont le même âge. On vérifie que cette relation est bien une relation d'équivalence.

3.2. Classes d'équivalences.

★ **3.2.1. Définition.** Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E . Si $a \in E$, on appelle *classe d'équivalence de a* et on note $\mathcal{C}\ell(a)$ (ou bien encore (a) , $\bar{a}$, $[a]$) l'ensemble $\{x \in E, a\mathcal{R}x\}$.

La proposition suivante est laissée en exercice (Exercice 0.9) :

★ **3.2.2. Proposition.** Si x, y sont deux éléments de E , alors

$$x\mathcal{R}y \iff [x] = [y]$$

et

$$x\mathcal{R}y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$$

★ **3.2.3. Définition.** Si E est un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E , on appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ et on note $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences.

4. Relations d'ordre, bornes supérieures.

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de relation d'ordre. Seront particulièrement importantes : la notion de plus grand élément et de borne supérieure (sous-paragraphe 4.1, 4.2, 4.4 et 4.5). Le sous-paragraphe sur les éléments maximaux et minimaux n'est pas fondamental pour nous et pourra donc être passé en première lecture (en particulier, il ne fera pas l'objet de questions à l'examen). Cependant, il faut savoir que la notion d'élément maximaux est particulièrement utile pour obtenir certains théorèmes d'existence, et c'est donc pour cette raison que nous l'incluons dans ce paragraphe.

Dans ce qui suivra, E sera toujours un ensemble.

4.1. Relations d'ordre.

★ **4.1.1. Définition.** Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* si et seulement si :

- (i) $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$ (réflexivité)
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
- (iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (transitivité)

Une relation d'ordre est souvent notée $\leq$ plutôt que $\mathcal{R}$. On dit alors que $(E, \mathcal{R}) = (E, \leq)$ est un *ensemble ordonné*.

Voici quelques exemples de relations d'ordre :

4.1.2. Exemples.

- Si $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, alors la relation $\leq$ usuelle est une relation d'ordre. Par contre la relation $<$ n'en est pas une.
- Si E est un ensemble, alors l'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .

4.1.3. Définition. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que la relation d'ordre $\leq$ est *totale* si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit alors que $(E, \leq)$ est *totalelement ordonné*.

4.1.4. Exemples.

- $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalelement ordonné.
- Si $E = \{0, 1\}$, $(\mathcal{P}(E), \subset)$ n'est pas totalelement ordonné. En effet $\{0\} \not\subset \{1\}$ et $\{1\} \not\subset \{0\}$.

4.2. Majorants, minorants, plus grand élément, plus petit élément.

★ **4.2.1. Définition.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E et a dans E . On dit que a est *majorant* (*resp. minorant*) de A si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad x \in A \Rightarrow x \leq a \text{ (resp. } a \leq x \text{)}.$$

On dit que A est *majorée* (*resp. minorée*) s'il existe au moins un majorant (*resp. minorant*) de A .

On dit que a est *plus grand* (*resp. petit*) *élément* de A si et seulement si $a \in A$ et a est majorant (*resp. minorant*) de A . On note alors $a = \max A$ (*resp.* $a = \min A$ *)*.

4.2.2. Proposition. *Si A possède un plus grand élément, celui-ci est unique.*

Preuve. En effet, soient a et a' deux plus grands éléments de A . Comme a' est majorant de A et que $a \in A$, on a $a \leq a'$. Comme a est majorant de A et que $a' \in A$, on a $a' \leq a$. Et donc $a = a'$. □

★ **4.2.3. Application : Partie entière d'un réel.** On se propose de montrer que, pour tout réel x , il existe un et un seul entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On dira que n est la *partie entière* de x et on notera $n = [x]$ ou bien $n = E(x)$.

Montrons d'abord l'unicité. Supposons qu'il existe deux parties entières n et n' . On a $n \leq x < n' + 1$ donc $n' + 1 > n$ ce qui implique que $n' \geq n$. De même, $n' \leq x < n + 1$ implique $n \geq n'$. D'où $n = n'$.

Il reste à montrer l'existence. Pour cela, nous avons besoin des deux lemmes suivants, que nous admettrons car ils découlent des axiomes de construction de $\mathbb{N}$:

★ **Lemme.** *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.*

Lemme. *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ a un plus grand élément.*

On pose alors $A = \{p \in \mathbb{Z}, p \leq x\}$. A est bien une partie non vide de $\mathbb{Z}$, majorée car si $p \in \mathbb{Z}$ est strictement supérieur à x , p est un majorant de A . D'après les lemmes, A admet donc un plus grand élément n . Comme $n \in A$, on a donc $n \leq x$. Il reste alors à vérifier que $x < n + 1$ pour pouvoir conclure. Pour cela, on remarque que $n + 1$ est majorant de A car $n + 1 \geq n$ et n est majorant de A . Si $n + 1$ était dans A , alors $n + 1$

serait aussi le plus grand élément de A , ce qui ne peut être possible car le plus grand élément est unique. Donc $n + 1 \notin A$ ce qui entraîne que $x < n + 1$. $\square$

★ **4.2.4. Application : Principe de récurrence.** Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \in A$ et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \Rightarrow n + 1 \in A.$$

Alors $A = \mathbb{N}$.

Preuve. Supposons $A \neq \mathbb{N}$. Posons $B = \mathbb{N} \setminus A$. B est donc non vide et donc possède un plus petit élément n . n ne peut valoir 0 sinon 0 serait dans B et dans A . En particulier $n > 0$. L'élément $n - 1$ ne peut être dans B car n est le plus petit élément de B ; donc $n - 1 \in A$. Or si $n - 1$ est dans A , on a $n - 1 + 1 = n$ qui est aussi dans A ce qui est absurde. $\square$

4.3. Éléments maximaux et minimaux.

4.3.1. Définition. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E . On dit qu'un élément a de E est un *élément maximal* (resp. *minimal*) si et seulement si a est dans A et

$$\forall x \in A, \quad x \geq a \Rightarrow x = a \quad (\text{resp. } \forall x \in A, \quad x \leq a \Rightarrow x = a).$$

4.3.2. Remarque. Cette notion d'élément maximal doit vous paraître un peu vague. En fait, quand un ensemble n'est pas totalement ordonné, parler de plus grand élément n'a pas toujours de sens. Ce seront les éléments maximaux qui joueront le rôle de plus grand élément. Par exemple, si on considère $(E, \leq) = (\mathcal{P}(\{0, 1\}), \subset)$ on a vu que ce n'est pas un ensemble totalement ordonné. En particulier, si $A = \{\{0\}, \{1\}\}$, il est clair que A n'a pas de plus grand élément, mais par contre A a deux éléments maximaux qui sont $\{0\}$ et $\{1\}$. Les propositions suivantes vont clarifier les liens entre plus grand élément et éléments maximaux.

4.3.3. Proposition. Soit E un ensemble ordonné et A une partie de E . Si A admet un plus grand élément a alors a est un élément maximal et c'est le seul.

Preuve. Exercice 0.12. $\square$

4.3.4. Proposition. Soit E un ensemble totalement ordonné et A une partie de E . Si a est un élément maximal de A , alors c'est le seul et a est le plus grand élément de A .

Preuve. Exercice 0.13. $\square$

4.4. Bornes supérieures et inférieures.

★ **4.4.1. Définition.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E . On dit que s est *borne supérieure* (resp. *inférieure*) de A si s est le plus petit (resp. grand) élément de l'ensemble des majorants de A . On notera $s = \sup A$ (resp. $s = \inf A$).

★ 4.4.2. Proposition.

- Si A possède une borne supérieure alors A est majoré
- Si A possède une borne supérieure, celle-ci est unique
- Si A possède un plus grand élément a alors a est la borne supérieure de A

Preuve. Exercice 0.14. $\square$

4.5. Cas de $\mathbb{R}$.

On étudie dans ce sous-paragraphe le cas du corps ordonné $\mathbb{R}$. Nous rappelons tout d'abord la définition des corps ordonnés :

4.5.1. Définition. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $\leq$ une relation d'ordre sur $\mathbb{K}$. On dit que $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ est un *corps ordonné* si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \quad x \leq y &\Rightarrow x + z \leq y + z \\ x \leq y \text{ et } 0 \leq z &\Rightarrow x \times z \leq y \times z \end{aligned}$$

En particulier, $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps ordonné.

Un des axiomes de construction de $\mathbb{R}$ et qui sera pour nous une propriété fondamentale est le théorème suivant que nous admettons :

★ **4.5.2. Théorème.** *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Nous obtenons alors le théorème suivant qui sera aussi fondamental pour nous :

★ **4.5.3. Théorème.** *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si $M \in \mathbb{R}$ est tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in A \Rightarrow x \leq M$$

alors $\sup A$ existe et $\sup A \leq M$.

De même, si $m \in \mathbb{R}$ est tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in A \Rightarrow m \leq x$$

alors $\inf A$ existe et $m \leq \inf A$.

Preuve. Exercice 0.15. $\square$

4.5.4. Remarque. En raison de son importance, ce théorème est appelé “théorème de passage au sup” (ou “théorème de passage à l'inf”). Bien faire attention que ce théorème n'est valable qu'avec des inégalités larges et non strictes. Par exemple, l'énoncé suivant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in A \Rightarrow x < M \text{ implique } \sup A < M$$

est un énoncé **faux**. Voir l'exercice 0.16.

Exercices.

Exercices d'apprentissage.

Exercice 0.1. Montrez la proposition 1.1.2.

Exercice 0.2. Montrez la proposition 1.2.2.

Exercice 0.3. Vérifiez les points non démontrés de la proposition 1.3.1.

Exercice 0.4. Vérifiez les points non démontrés de la proposition 1.3.2.

Exercice 0.5. Montrez la Proposition 1.4.3.

Exercice 0.6. Vérifiez la remarque 1.4.5.

Exercice 0.7. Démontrez la proposition 2.1.2.

Exercice 0.8. Vérifiez que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers pairs, l'ensemble des entiers impairs et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

Exercice 0.9. Montrez la proposition 3.2.2.

Exercice 0.10. Montrez que les classes d'équivalences forment une partition de E .

Exercice 0.11. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F . Si x et y sont dans E , on dit que $x\mathcal{R}_f y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Montrez que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence sur E . Réciproquement, si E est un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E , montrez qu'il existe un ensemble F et une application $f : E \rightarrow F$ tels que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$ (*indication* : prendre $F = E/\mathcal{R}$).

Exercice 0.12. Prouvez la proposition 4.3.3.

Exercice 0.13. Prouvez la proposition 4.3.4.

Exercice 0.14. Prouvez la proposition 4.4.2.

Exercice 0.15. Prouvez le théorème 4.5.3.

Exercice 0.16. Etayez la remarque 4.5.4. à l'aide de l'exemple $A = [0, 1[$ et $M = 1$.

Exercices d'approfondissement.

Exercice 0.17. Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective et que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Exercice 0.18. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A et B deux sous-ensembles de E et X, Y deux sous-ensembles de F . Comparer $f(A) \cap f(B)$ et $f(A \cap B)$, $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ et $f^{-1}(X \cap Y)$. Idem avec $\cup$ au lieu de $\cap$. Comparer $f^{-1}(f(A))$ et A , $f(f^{-1}(X))$ et X .

Montrer que f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

Montrer que f est surjective $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(X)) = X$.

Exercice 0.19. Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. A quelle condition sur f et g existe-t'il une application $h : F \rightarrow G$ telle que $h \circ f = g$?

Exercice 0.20. Soient E, F, G et H quatre ensembles, $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications. Montrez que si $h \circ g \circ f$ et $f \circ h \circ g$ sont injectives et $g \circ f \circ h$ est surjective alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 0.21. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Trouvez l'ensemble de définition de f , montrez que f est injective et trouvez l'image de f . On veut définir une suite par $z_0 = a$ où a est dans $\mathbb{C}$ et $\forall n \geq 0, z_{n+1} = f(z_n)$. Quelle condition doit vérifier a pour que la suite $(z_n)_n$ existe ?

Exercice 0.22. Montrez qu'un ensemble infini contient une partie infinie dénombrable. Montrez qu'un ensemble E est infini si et seulement si, pour tout a dans E , E et $E \setminus \{a\}$ sont équipotents.

Exercice 0.23. Montrez que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Pour cela, poser $f : (p, q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^p(2q+1)$ et montrer que f est une bijection de $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Exercice 0.24. Montrez que si F est dénombrable et que si il existe une injection de E dans F , alors E est dénombrable. Montrez qu'un ensemble E est dénombrable si et seulement si il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

Exercice 0.25. Montrez qu'un ensemble non vide E est dénombrable si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E .

Exercice 0.26. Montrez que si E est dénombrable et s'il existe une surjection de E dans F alors F est dénombrable.

Exercice 0.27. Montrez que si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles dénombrables alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est dénombrable (se ramener par récurrence au cas où $n = 2$).

Exercice 0.28. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables indexée par un ensemble I dénombrable. Montrez que $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ est dénombrable.

Exercice 0.29. Montrez que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Montrez que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 0.30. Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On définit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f_n(n) + 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \neq f_n$. En déduire que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) n'est pas dénombrable.

Exercice 0.31. Montrez que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (même démarche que dans 0.30).

Exercice 0.32. Montrez que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Pour cela, montrer que $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n} \in \mathbb{R}$ est injective. Montrez que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 0.33. Montrez que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 0.34. On désigne par $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. S'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$, on dit que α est algébrique. Sinon, on dit que α est transcendant.

- Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrez que $\mathbb{Z}_m[X] = \{P \in \mathbb{Z}[X], d^0 P \leq m\}$ est dénombrable.
- Montrer que l'ensemble des zéros des polynômes de $\mathbb{Z}_m[X]$ est dénombrable.
- En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
- Montrer que l'ensemble des réels transcendants n'est pas dénombrable (et donc qu'il est non vide, ce qui n'était pas évident !).

Exercice 0.35. Montrez que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \leq e^t$$

Exercice 0.36. Montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin nt| \leq n |\sin t|.$$

Exercice 0.37. Soit A une partie de E . On définit une relation sur $\mathcal{P}(E)$ par $X \mathcal{R} Y$ si et seulement si $X \cap A = Y \cap A$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. Si A est fini de cardinal n , trouver le cardinal de l'ensemble quotient $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$.

Exercice 0.38. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Soit $A + B = \{x + y/x \in A, y \in B\}$. Que peut-on dire de $\sup(A \cup B)$? de $\sup(A + B)$? Donner une réponse précise.

Exercice 0.39. Soient X un ensemble, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications bornées (*i.e.* $f(X)$ et $g(X)$ sont des ensembles bornés de $\mathbb{R}$). On pose $\sup f = \sup\{f(x)/x \in X\}$. Que peut-on dire de $\sup(f + g)$?

Corrigé des Exercices d'apprentissage.

Exercice 0.1. Soient x et x' deux éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme g est injective et que $g(f(x)) = g(f(x'))$, on en déduit que $f(x) = f(x')$, et comme f est injective, on obtient finalement $x = x'$; d'où l'injectivité de $g \circ f$.

Exercice 0.2. Soit z dans G . Comme g est surjective, il existe y dans F tel que $g(y) = z$. Comme f est surjective, il existe x dans E tel que $f(x) = y$. On a alors : $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, d'où la surjectivité de $g \circ f$.

Exercice 0.3. Montrons tout d'abord que s'il existe g telle que $g \circ f = Id_E$, alors f est injective : Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. On obtient donc que $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit encore que $x = x'$ puisque $g \circ f = Id_E$; d'où l'injectivité de f .

Montrons que si f est injective, alors il existe g vérifiant les propriétés énoncées : Pour cela, on définit g de la manière suivante : soit y dans F ; si y a un antécédant x par f , celui ci est unique car f est injective et on peut poser $g(y) = x$; si maintenant y n'a pas d'antécédant par f , alors on pose $g(y) = a$ où a est quelconque dans E .

Il reste à vérifier que $g \circ f = Id_E$: soit x dans E et $y = f(x)$. Comme f est injective, x est l'unique antécédant de y par f et donc $g(y) = x$, ce qui entraîne que $g(f(x)) = x$ soit encore que $g \circ f = Id_E$.

Exercice 0.4. Montrons tout d'abord que s'il existe g telle que $f \circ g = Id_F$, alors f est surjective : Soit y un élément de F . Comme $f(g(y)) = y$, on en déduit que $x = g(y)$ est un antécédant de y par f , et donc que f est surjective.

Montrons que si f est surjective, alors il existe g vérifiant les propriétés énoncées : Pour cela, on définit g de la manière suivante : soit y dans F ; comme f est surjective, y a au moins un antécédant par f . On en choisit un qu'on appelle x et on pose $g(y) = x$.

Il reste à vérifier que $f \circ g = Id_F$. Soit y dans F et $x = g(y)$. Comme x est un antécédant de y par f , on a $f(x) = y$ soit encore $f(g(y)) = y$. Et donc, $f \circ g = Id_F$.

Exercice 0.5. Remarquons tout d'abord que si g existe et vérifie les propriétés énoncées, alors d'après les propositions 1.3.1 et 1.3.2, f est surjective et injective, donc bijective.

Réciproquement, si f est bijective, d'après les propositions 1.3.1 et 1.3.2, il existe $g_1 : F \rightarrow E$ et $g_2 : F \rightarrow E$ telles que $f \circ g_1 = Id_F$ et $g_2 \circ f = Id_E$. Il reste à vérifier que $g_1 = g_2$ pour conclure. Pour cela, on remarque que $g_2 \circ f \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ (Id_F) = g_2$ et que $g_2 \circ f \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = (Id_E) \circ g_1 = g_1$. D'où $g_1 = g_2$.

Exercice 0.6. Par définition, $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$. Or si f est bijective et si x est dans E , y est dans F et on a $y = f(x)$ si et seulement si $x = f^{-1}(y)$; donc $f^{-1}(B) = \{x = f^{-1}(y) \in E, f(f^{-1}(y)) = y \in B\}$.

Exercice 0.7. Soit $f : E_1 \rightarrow F_1$ une bijection et $g : E_2 \rightarrow F_2$ une bijection. Nous allons montrer que, l'application $h : E_1 \times F_1 \rightarrow E_2 \times F_2$ et qui à un élément (x_1, y_1) associe $(x_2, y_2) = (f(x_1), g(y_1))$ est une bijection.

Montrons que h est injective : Soient (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1) deux éléments de $E_1 \times F_1$ tels que $h(x_1, y_1) = h(x'_1, y'_1)$. On a donc $f(x_1) = f(x'_1)$ et $g(y_1) = g(y'_1)$, d'où $x_1 = x'_1$ et

$y_1 = y'_1$ car f et g sont injectives. Par conséquent, on obtient que $(x_1, y_1) = (x'_1, y_1)$, ce qui prouve l'injectivité de h .

Montrons que h est surjective : Soit (x_2, y_2) un élément de $E_2 \times F_2$. Comme f et g sont surjectives, on obtient que l'existence de x_1 dans E_1 et de y_1 dans F_1 tels que $x_2 = f(x_1)$ et $y_2 = g(y_1)$. On a alors $h(x_1, y_1) = (f(x_1), g(y_1)) = (x_2, y_2)$, ce qui prouve la surjectivité de h .

Exercice 0.8. $\mathbb{N}$ est dénombrable car l'application identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ réalise une bijection.

$\mathbb{N}^*$ est dénombrable car $f : x \in \mathbb{N}^* \mapsto x - 1 \in \mathbb{N}$ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$. En effet, f est injective car, si x et x' sont dans $\mathbb{N}^*$ et vérifient $f(x) = f(x')$, alors $x - 1 = x' - 1$, ce qui entraîne que $x = x'$. De plus, f est surjective car, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x = f(x + 1)$.

Il reste à vérifier que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On construit une bijection $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ de la manière suivante. On pose $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(-2) = 4$, etc.... On vérifie que l'expression générale de f est donnée par $f(0) = 0$, $f(n) = 2n - 1$ si n est strictement positif et $f(n) = -2n$ si n est strictement négatif. Il reste à vérifier que f ainsi définie est une bijection. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un unique $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = f(p)$. Si $n = 0$, il est clair que si $n = f(p)$, alors $p = 0$. En effet, si on suppose que $p > 0$, alors $f(p) = 2p - 1$ est impair donc ne peut valoir 0 et si $p < 0$, alors $f(p) = -2p \geq 2$ car $-p \geq 1$. Si maintenant n est impair supérieur ou égal à 1, alors n est de la forme $2p - 1$ avec $p \geq 1$ ce qui implique que $n = f(p)$. De même si n est pair supérieur ou égal à 2. Il reste à vérifier que, si $n = f(p) = f(p')$, alors $p = p'$. Nous allons le vérifier seulement dans le cas où n est impair, le cas où n est pair étant similaire. Comme n est impair, on en déduit que p et p' sont strictement positifs. Et donc $n = 2p - 1 = 2p' - 1$, ce qui implique que $p = p'$ et entraîne donc que f est bijective.

Exercice 0.9. Tout d'abord, si $[x] = [y]$, alors $y \in [x]$ et donc $x\mathcal{R}y$. Réciproquement, montrons que, si $x\mathcal{R}y$, alors $[x] = [y]$. Il suffit de montrer que $[x] \subset [y]$ pour conclure, car l'autre inclusion s'établira de manière tout à fait analogue. Soit donc z un élément de $[x]$. Par définition $x\mathcal{R}z$, et comme $x\mathcal{R}y$, on en déduit que $y\mathcal{R}z$, soit que $z \in [y]$. On a bien obtenu que $[x] \subset [y]$.

Montrons maintenant que si $x\mathcal{R}y$, alors $[x] \cap [y] = \emptyset$. Supposons que ce ne soit pas vrai et donc qu'on ait $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Il existe alors z dans $[x] \cap [y]$. En particulier, on a $x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$. Mais la transitivité de la relation implique que $x\mathcal{R}y$, ce qui est contradictoire. On a donc bien montré que $x\mathcal{R}y$ implique $[x] \cap [y] = \emptyset$. Réciproquement, si $x\mathcal{R}y$, d'après ce qui précède, $[x] = [y]$ donc $[x] \cap [y] = [x] \neq \emptyset$.

Exercice 0.10. C'est une conséquence directe de l'exercice précédent. En effet, des classes d'équivalences sont soit disjointes, soit confondues. De plus $E = \bigcup_{x \in E} [x]$.

Exercice 0.11. Soit x dans E . Comme $f(x) = f(x)$, on a $x\mathcal{R}_f x$. Soit y dans E . Comme $f(x) = f(y)$ implique que $f(y) = f(x)$, on a $x\mathcal{R}_f y$ qui implique que $y\mathcal{R}_f x$. Enfin si x , y et z sont trois éléments de E tels que $x\mathcal{R}_f y$ et $y\mathcal{R}_f z$, alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ ce qui entraîne que $f(x) = f(z)$, soit encore que $x\mathcal{R}_f z$. On a bien montré que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence sur E .

Réciproquement, il suffit de considérer $f : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ définie par $f(x) = [x]$. On a bien $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x] = [y] \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ d'après la proposition 3.2.2.

Exercice 0.12. Supposons que a soit le plus grand élément de A . Montrons que a est un élément maximal. Pour cela, si x est dans A , on a $x \leq a$ car a est majorant, et donc, si $x \geq a$, on obtient que $x = a$.

Soit a' un autre élément maximal de A . a est majorant de A et $a' \in A$ donc $a' \leq a$. Comme a' est un élément maximal, on a $a = a'$.

Exercice 0.13. Supposons que E soit totalement ordonné. Soit a' un autre élément maximal de A . On a soit $a' \leq a$, soit $a \leq a'$. Si $a \leq a'$, comme a est élément maximal de A et que $a' \in A$, on a $a = a'$. De même si $a' \leq a$.

Il reste à vérifier que a est le plus grand élément de A . Pour cela, soit x un élément de A . On a soit $x \leq a$, soit $x \geq a$. Si $x \geq a$ alors $x = a$ car a est maximal, ce qui entraîne que $x \leq a$. Dans tous les cas, on obtient que $x \in A$ entraîne que $x \leq a$, soit encore que a est majorant de A . Comme $a \in A$, on en déduit que a est le plus grand élément de A .

Exercice 0.14. Si A possède une borne supérieure s , alors s est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A . En particulier, s est donc un majorant de A , ce qui prouve que A est majoré.

L'unicité du plus petit élément d'un ensemble entraîne l'unicité de la borne supérieure, si celle-ci existe.

Enfin, si A possède un plus grand élément a , alors a est majorant donc $s = \sup A \leq a$. Comme s est un majorant de A et que a est dans A , on a $a \leq s$, ce qui prouve alors que $a = s$.

Exercice 0.15. On va prouver le premier point, le second étant analogue. Soit M dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x \in A$ implique $x \leq M$. A est donc majoré par M et donc admet une borne supérieure. De plus $\sup A$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants, donc minore les majorants de A . Comme M est un majorant de A , on obtient donc $\sup A \leq M$.

Exercice 0.16. Si $A = [0, 1[$ et $M = 1$, alors on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in A \Rightarrow x < M$$

Cependant $\sup A = 1$. En effet comme 1 est majorant de A , on a $\sup A \leq 1$. Comme $0 \in A$, on a donc $0 \leq \sup A$, ce qui implique que $\sup A \in [0, 1]$. Si $\sup A < 1$, posons $x = \frac{1}{2}(1 + \sup A)$, alors $0 \leq \sup A < x < 1$ ce qui montre que $\sup A$ n'est pas un majorant de A . C'est absurde.

Indications et Résultats pour les exercices d'approfondissement.

Exercice 0.17. Procéder comme pour les exercices 0.1 et 0.2.

Exercice 0.18. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Il n'y a pas égalité en général (trouver un contre exemple).

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B).$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$A \subset f^{-1}(f(A))$. Il n'y a pas égalité en général.

$f(f^{-1}(X)) \subset X$. Il n'y a pas égalité en général.

Exercice 0.19. La condition est :

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y).$$

Exercice 0.20. $h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$ est injective, donc f est injective d'après l'exercice 0.17...

Exercice 0.21. L'ensemble de définition est $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. L'image est $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. z_1 existe si $a \neq -i$. z_2 existe si $z_1 \neq -i$ soit si $a \neq 1$. Continuer ainsi. On trouve que la suite est définie si et seulement si $a \notin \{-i, 1\}$ (faire une récurrence).

Exercice 0.22. E est infini. Soit a_0 un élément de E . $E \setminus \{a_0\}$ est infini, donc non vide. Soit $a_1 \in E \setminus \{a_0\}$. Poursuivre le procédé par récurrence. Pour l'autre question, utiliser le fait qu'un ensemble dénombrable union un singleton est encore dénombrable, et que $\mathbb{N}^*$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exercice 0.24. Remarquer que E est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$ et que toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Pour ce dernier point, si A est une partie de $\mathbb{N}$ infinie, construire une bijection de A dans $\mathbb{N}$: prendre $f(0) = \min A$, $f(1) = \min(A \setminus \{f(0)\})$, ...

Exercice 0.25. $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ est surjective donc il existe $g : E \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_E$. Utiliser l'exercice précédent.

Exercice 0.26. Utiliser l'exercice précédent.

Exercice 0.27. Se ramener au cas où $n = 2$ par récurrence sur n et utiliser le fait que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Exercice 0.28. Soit f_i une surjection de $\mathbb{N}$ sur E . Soit $f : I \times \mathbb{N}$ qui à (i, n) associe $f_i(n)$. Alors f est surjective.

Exercice 0.29. $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\}$. $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{p/q, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, |p| \leq n, |q| \leq n\}$. Si $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([0, n])$.

Exercice 0.30. Si $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable alors il existe une suite d'applications (f_n) telle que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 0.32. Pour montrer que f est injective, soient x et y dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $x \neq y$. Soit $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}, x_n \neq y_n\}$. Alors

$$f(x) - f(y) = \frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{3^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n}.$$

Montrez que la somme de droite pour $n \geq n_0 + 1$ est strictement inférieure en module au module du premier terme pour $n = n_0$. Enfin $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$.

Exercice 0.33. Considérer par exemple la fonction qui à une partie A de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ associe la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = 1$ si $n \in A$ et $x_n = 0$ si $n \notin A$. Montrer que c'est une bijection.

Exercice 0.37. Le cardinal de l'ensemble quotient est 2^n . Montrez pour cela que $f : [X] \mapsto X \cap A$ est bien définie et bijective.

Exercice 0.38. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 0.39. $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Il n'y a pas égalité en général.