

Chapitre 1.

Introduction.

Le but de ce chapitre est de fixer la terminologie que nous emploierons dans ce cours et de présenter les problèmes que nous étudierons. Nous commençons d'abord par de brefs rappels et par des notations et définitions diverses.

1. Définitions, notations et rappels.

1.1. Points et sous-ensembles des espaces euclidiens. $\mathbb{R}$ sera le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ sera celui des nombres complexes. Nous travaillerons la plupart du temps dans $\mathbb{R}^n$ et n désignera toujours la dimension. Les points de $\mathbb{R}^n$ seront généralement notés x, y, ξ, η ; les coordonnées de x étant $(x_1, \dots, x_n)$.

Si U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $\overline{U}$ sera la fermeture ou l'adhérence de U et ∂U le bord de U , c'est à dire $\partial U = \overline{U} \setminus \text{Int } U$ où $\text{Int } U$ désigne l'intérieur de U .

Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on pose

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

si bien que la norme euclidienne de x est donnée par

$$\|x\| = (x \cdot \overline{x})^{1/2} \quad (= (x \cdot x)^{1/2} \text{ si } x \text{ est réel})$$

Nous utiliserons les notations suivantes en ce qui concerne les sphères et les boules de $\mathbb{R}^n$: si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$,

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\},$$

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = r\}.$$

De même dans $\mathbb{C}^n$. Nous noterons $\mathbb{S}_n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{B}_n$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

1.2. Multi-indices et dérivées partielles. Un n -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers positifs sera appelé un *multi-indice*. On pose

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!,$$

et pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Nous utiliserons parfois la notation abrégée suivante

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

pour la dérivée partielle par rapport à x_j et parfois, nous écrirons

$$u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \dots$$

Les dérivées d'ordres supérieurs s'expriment de manière concise grâce aux notations multi-indicielles :

$$\partial^\alpha = \prod \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Notez qu'en particulier, si $\alpha = 0$, alors ∂^α est l'opérateur identité. Avec ces notations, il serait naturel de noter ∂u le n -uplet de fonctions $(\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ quand u est une fonction différentiable. Mais, nous utiliserons la notation plus communément employée (par les physiciens surtout) suivante :

$$\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$$

et nous appellerons ∇u le *gradient* de u .

En ce qui nous concerne, un *champ de vecteurs* sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sera simplement une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si F est un champ de vecteurs sur un sous-ensemble ouvert Ω , on définit la dérivée directionnelle ∂_F par

$$\partial_F = F \cdot \nabla,$$

soit, en d'autres termes, si u est une fonction différentiable sur Ω ,

$$\partial_F u(x) = F(x) \cdot \nabla u(x) = \sum_{j=1}^n F_j(x) \partial_j u(x).$$

Enfin, si F est toujours un champ de vecteurs, on appelle *divergence de F* et on note $\operatorname{div} F$ la fonction

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Exercice 1.1. Prouver la formule du multinôme :

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha,$$

où $\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ et où la somme est prise sur tous les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $|\alpha| = k$. On pourra faire une récurrence sur n .

Exercice 1.2. Prouver la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \partial^{\alpha-\beta} v,$$

où $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $|\alpha|$, $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ et $\beta \leq \alpha$ signifie $\beta_i \leq \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, n$. On pourra faire une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Espaces de fonctions. Si Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $C(\Omega)$ sera l'espace de fonctions continues sur Ω (pour la topologie induite) à valeurs complexes.

Si Ω est ouvert et k est un entier positif, $C^k(\Omega)$ sera l'espace des fonctions ayant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k , et $C^k(\overline{\Omega})$ sera l'espace des fonctions $u \in C^k(\Omega)$ telles que $\partial^\alpha u$ s'étendent continûment à $\overline{\Omega}$ pour $|\alpha| \leq k$. Nous posons $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$ et $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\overline{\Omega})$.

Exercice 1.3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrez que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) x^\alpha + \|x\|^k \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand $\|x\|$ tend vers 0. On pourra fixer $x \in \mathbb{R}^n$ et considérer la fonction d'une variable $g(t) = f(tx)$.

Nous définissons maintenant les espaces höldériens ou lipschitziens $C^\lambda(\Omega)$ où Ω est ouvert et $0 < \lambda < 1$. $C^\lambda(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω qui satisfont des conditions de Hölder localement uniformément. En d'autres termes, $u \in C^\lambda(\Omega)$ si et seulement si, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C et il existe $\eta \in]0, d(K, \partial\Omega)[$ tels que

$$\forall y \in B_\eta(0), \quad \sup_{x \in K} |u(x+y) - u(x)| \leq C \|y\|^\lambda$$

(on a pris $\eta < d(K, \partial\Omega)$ uniquement pour que, quand $x \in K$ et $\|y\| < \eta$, on ait $x+y \in \Omega$).

Exercice 1.4. Montrez que, pour tout $\lambda < 1$, $C^1(\Omega) \subset C^\lambda(\Omega)$.

Si k est un entier positif, $C^{k+\lambda}(\Omega)$ sera l'ensemble des fonctions $u \in C^k(\Omega)$ telles que toutes les dérivées partielles $\partial^\beta u$ d'ordre $|\beta| \leq k$ sont dans $C^\lambda(\Omega)$.

Le *support* d'une fonction u , noté $\text{supp } u$, est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $u = 0$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ dont le support est compact et inclus dans Ω . En particulier, si Ω est ouvert, de telles fonctions s'annulent au voisinage de $\partial\Omega$.

Exercice 1.5. Montrez que $\text{supp } u = \overline{\{x, u(x) \neq 0\}}$.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ est *analytique réelle* si et seulement si on peut la développer en série entière au voisinage de tout point. En d'autres termes, u est analytique réelle si et seulement si, pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $y \in B_r(x)$,

$$u(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!} (y-x)^\alpha,$$

la série convergeant normalement sur $B_r(x)$. Dans le cadre complexe, si pour tout $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $w \in B_r(z)$,

$$u(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(z) (w-z)^\alpha$$

où $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$ et $\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}}$, nous dirons que u est *holomorphe*.

Enfin, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ qui décroissent plus rapidement à l'infini que n'importe quelle puissance de x . En d'autres termes, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout multi-indices α et β , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|^\alpha |\partial^\beta u(x)| < +\infty.$$

1.3. Intégrales dans $\mathbb{R}^n$ et intégrales de surfaces. On note dx la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction mesurable f d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty.$$

Si S est une hypersurface de classe C^1 (voir le paragraphe suivant pour la définition précise), on appellera $d\sigma$ la mesure de surface euclidienne sur S . Pour les lecteurs intéressés, la définition d'une telle mesure est donnée en annexe à la fin du chapitre. On note $d\sigma_n$ la mesure de surface sur $\mathbb{S}_n$. En particulier, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{r=0}^{+\infty} r^{n-1} \int_{\mathbb{S}_n} f(r\zeta) d\sigma_n(\zeta) dr$$

(cf. annexe à la fin du chapitre).

Exercice 1.6. Montrez que,

$$\text{Vol } \mathbb{B}_n = \frac{1}{n} \sigma(\mathbb{S}_n).$$

où $\text{Vol } \mathbb{B}_n$ désigne le volume de la boule unité et $\sigma(\mathbb{S}_n)$ désigne la surface de la sphère unité.

Exercice 1.7. Montrez que, si $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$ est σ_n -borélienne alors

$$\int_{\mathbb{S}_n} f(x) d\sigma_n(x) = n \int_{\mathbb{B}_n \setminus \{0\}} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) dx.$$

Exercice 1.8. Vérifiez que σ est invariante par tout automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que, si U est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

alors

$$\int_{\mathbb{S}_n} f \circ U d\sigma_n = \int_{\mathbb{S}_n} f d\sigma_n.$$

Exercice 1.9. Soit $r > 0$. Montrez que la fonction $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto \|x\|^\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est intégrable dans $B_r(0)$ si et seulement si $\lambda > -n$, et qu'elle est intégrable dans $\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$ si et seulement si $\lambda < -n$.

Exercice 1.10. Montrez que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = 1.$$

Montrez que, pour les nombres complexes s tels que $\operatorname{Re} s > 0$, la fonction $]0, +\infty[\ni t \mapsto e^{-t} t^{s-1}$ est intégrable. On note

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

En faisant un passage aux coordonnées sphériques dans l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx,$$

montrez que la surface de $\mathbb{S}_n$ est $\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$. En déduire que le volume de $\mathbb{B}_n$

est $\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$.

Exercice 1.11.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact de classe C^1 . Montrez que φ' est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\varphi(0) = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact, de classe C^1 .

2.a. Montrez que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad f(x) = - \int_0^{+\infty} \nabla f(x + ty) \cdot y dt.$$

2.b. Soit $\sigma(\mathbb{S}_n)$ la surface de $\mathbb{S}_n$. Montrez que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = - \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}_n)} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{y \in \mathbb{S}_n} \nabla f(x + ty) \cdot y d\sigma_n(y) dt.$$

2.c. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}_n)} \int_{z \in \mathbb{R}^n} \nabla f(z) \cdot \frac{x - z}{\|x - z\|^n} dz.$$

1.4. Hypersurfaces, vecteurs normaux, paramétrisations. On dit qu'un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est une *hypersurface de classe C^k* si, pour tout $x_0 \in S$, il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant x_0 et une fonction à valeurs réelles $\varphi \in C^k(V)$ telle que $\nabla \varphi$ ne s'annule pas sur $S \cap V$ et telle que

$$S \cap V = \{x \in V, \varphi(x) = 0\}.$$

Dans ce cas, grâce au théorème des fonctions implicites, nous pouvons résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ près de x_0 et obtenir pour une certaine coordonnée x_i (nous supposons par exemple que $i = n$)

$$x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1})$$

où ψ est une fonction de classe C^k .

Exercice 1.12. Vérifier l'affirmation précédente sans omettre de détail et en supposant le théorème des fonctions implicites connu.

Un voisinage de x_0 dans S peut alors être envoyé sur un morceau de l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ par le difféomorphisme local de classe C^k

$$x \mapsto (x', x_n - \psi(x')) \quad \text{où } x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Exercice 1.13. Vérifier l'affirmation précédente.

On dit alors que l'application

$$x' \mapsto (x', \psi(x'))$$

est une *paramétrisation locale*.

Avec S , V et φ vérifiant les propriétés précédentes, le vecteur $\nabla \varphi(x)$ est perpendiculaire à S en x pour tout $x \in S \cap V$. En effet, l'équation du plan tangent en x est $\{X \in \mathbb{R}^n, \nabla \varphi(x) \cdot (X - x) = 0\}$, ce qui montre que $\nabla \varphi(x)$ est perpendiculaire au plan tangent à S en x , donc perpendiculaire à S en x . Si on suppose que S est orientée, c'est-à-dire que nous avons choisi un vecteur unitaire $\vec{n}(x)$ pour chaque $x \in S$, qui est une fonction continue de x , perpendiculaire à S en x , $\vec{n}(x)$ sera appelé la *normale* à S en x ; clairement, sur $S \cap V$, on a :

$$\vec{n}(x) = \pm \frac{\nabla \varphi(x)}{\|\nabla \varphi(x)\|}.$$

Si S est le bord d'un domaine Ω , on choisira toujours l'orientation de façon à ce que le vecteur $\vec{n}(x)$ pointe vers l'extérieur de Ω .

Si u est une fonction définie dans un voisinage de S , on définit la *dérivée normale* de u sur S par

$$\partial_{\vec{n}}u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \partial_{\vec{n}(x)}u(x) = \vec{n}(x) \cdot \nabla u(x).$$

Exercice 1.14. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ donné par $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$ où $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et tel que $\nabla \rho$ ne s'annule pas sur $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$. Montrez que $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$ et que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > 0\}$. Donnez la forme du plan tangent en un point x_0 du bord de Ω (on fera intervenir le gradient $\nabla \rho(x_0)$ dans cette expression). On dit qu'un vecteur $\vec{v}$ est extérieur à Ω en un point $x_0 \in \partial\Omega$ si et seulement si

$$\exists t_0 > 0, \quad \forall t \in]0, t_0[, \quad x_0 + t\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Quelle est la normale extérieure unitaire à Ω en x_0 ?

Enfin, nous avons le théorème de la divergence suivant :

Théorème de la divergence ou Formule de Green-Ostrogradsky.

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ et $S = \partial\Omega$ qu'on suppose de classe C^1 . Soit F un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$. Alors

$$\int_S F(y) \cdot \vec{n}(y) d\sigma(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx.$$

Preuve. En annexe.

Exercice 1.15. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Soient u, v des fonctions de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$. On note dm la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle sur Ω et $d\lambda$ la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur le bord $\partial\Omega$ de Ω . On note Δ l'opérateur de Laplace (où Laplacien) défini par $\Delta = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$. Enfin, si (x_0, y_0) , on note $\vec{n}(x_0, y_0)$ la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$ en (x_0, y_0) . Montrez la formule suivante (Green-Riemann) :

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dm = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\lambda.$$

Indication. Passer en coordonnées polaires et intégrer par parties.

Exercice 1.16. Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et soient u et v deux applications de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$. En appliquant la formule de Green-Ostrogradsky au champ de vecteurs $F = u\nabla v - v\nabla u$, montrer la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dm = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma.$$

2. Equations aux dérivées partielles.

2.1. Définition. On appelle *équation aux dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal k* toute équation de la forme

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \quad (1)$$

reliant une fonction u de $x \in \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles ou complexes, x et les dérivées partielles de u d'ordres inférieurs ou égaux à k et où F est une fonction des variables $x, u(x), (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}$ et à valeurs réelles ou complexes. Si k est le plus petit choisi parmi tous les k vérifiant cette propriété, on dit que cette équation aux dérivées partielles est d'ordre exactement k .

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u = u(x)$ une fonction de classe C^k sur Ω , on dit que u est une *solution classique* de l'équation aux dérivées partielles (1) si

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0.$$

Si l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x) \quad (2)$$

où f est définie sur Ω à valeurs réelles ou complexes, on dit alors que l'équation (1) est une *équation aux dérivées partielles linéaires*. Si les fonctions a_α sont constantes, on dit que (1) est une *équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants*, et si dans le cas d'une équation à coefficients constants, $f \equiv 0$ (*resp.* $f \not\equiv 0$), on dit que c'est une équation *homogène* (*resp.* *non homogène*).

Si maintenant, (1) peut être mise sous la forme

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1}) \partial^\alpha u = b(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1}), \quad (3)$$

on dira que l'équation (1) est *quasi-linéaire*.

Enfin, si dans l'équation (1), u et F ne sont plus des fonctions à valeurs réelles ou complexes mais à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}^m$ où $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, nous dirons que (1) est un *système d'équations aux dérivées partielles*. On définirait de manière analogue un système d'équations aux dérivées partielles linéaire, à coefficients constants, homogène, non homogène, quasi-linéaire.

Donnons quelques exemples de telles équations et de tels systèmes d'équations.

2.2. Quelques exemples.

1. Equation de Cauchy-Riemann dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

où u est à valeurs complexes et $i = \sqrt{-1}$.

2. Equation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

3. Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (on prend $(t, x_1, \dots, x_n)$ pour coordonnées où, physiquement, t désigne le temps et Δ_x désigne le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ pour les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0.$$

4. Equation des ondes dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u = 0.$$

5. Equation de transport dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x u = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$.

6. Equation d'Helmholtz dans $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Equation de Schrödinger dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta_x u = 0.$$

8. Equation de Kolmogorov dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

9. Equation du télégraphe dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

10. Equation des ondes généralisée dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

11. Equation d'Airy dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = 0.$$

12. Equation de rayonnement dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0.$$

13. Equation de Liouville dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_i u) = 0$$

où ξ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

14. Equation de Fokker-Planck dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{i,j} u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) = 0,$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une application à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 et b est une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

15. Equation d'Eikonal

$$\|\nabla u\| = 1.$$

16. Equation de Poisson non linéaire :

$$\Delta u + f(u) = 0$$

où f est une fonction continue.

17. Equation du p -Laplacien

$$\operatorname{div} (\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) = 0$$

où, si F est une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

est la *divergence* du champs de vecteur F .

18. Equation de la surface minimale :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0.$$

19. Equation de Monge-Ampère en dimension 2 :

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f.$$

20. Equation d'Hamilton-Jacobi :

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0.$$

21. Equation de la loi de conservation scalaire :

$$u_t + \operatorname{div}_x F(u) = 0.$$

22. Equation de Burger :

$$u_t + uu_x = 0.$$

23. Equation de réaction-diffusion scalaire :

$$u_t - \Delta_x u = f(u).$$

24. Equation de la porosité :

$$u_t - \Delta_x(u^\gamma) = 0.$$

25. Equation des ondes non linéaires :

$$u_{tt} - \Delta_x u = f(u)$$

26. Equation de Korteweg-de-Vries (KdV) :

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

27. Equations d'élasticité linéaire en équilibre :

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) = \vec{0}.$$

28. Equations d'élasticité linéaire en évolution :

$$\vec{u}_{tt} - \mu \Delta \vec{u} - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) = \vec{0}.$$

29. Equations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \\ \vec{B}_t = -\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \vec{E} = 0. \end{cases}$$

30. Système des lois de conservation :

$$\vec{u}_t + \operatorname{div} \vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}.$$

31. Equation de réaction-diffusion :

$$\vec{u}_t - \Delta \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}).$$

32. Equations d'Euler pour un fluide incompressible

$$\begin{cases} \vec{u}_t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0. \end{cases}$$

33. Equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible et visqueux :

$$\begin{cases} \vec{u}_t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \Delta \vec{u} = \nabla p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0. \end{cases}$$

Exercice 1.17. *Classifiez les équations aux dérivées partielles du paragraphe 2.2 : sont-elles linéaires, homogènes, à coefficients constants, quasi linéaires ? Quels sont leurs ordres ?*

2.3. Problèmes. D'une manière générale, nous nous intéresserons dans ce cours aux problèmes suivants :

Existence. Peut-on trouver une solution de (1), satisfaisant au besoin certaines conditions, dans le voisinage de tout point, ou dans un domaine donné ? Peut-on construire des solutions ?

Unicité. En général, (1) aura plusieurs solutions. Quelles genres de conditions doit-on imposer sur u pour que la solution soit unique ?

Comportement des solutions. Quelles seront les propriétés des solutions ? Seront-elles différentiables ? jusqu'à quel ordre ? Est-ce que les solutions dépendront continûment des conditions au bord du domaine ? Dans le cas linéaire, est-ce que les solutions u de (2) dépendront continûment de f ?

Les réponses à ces questions dépendront de la nature des contraintes imposées aux solutions u de l'équation (1), et dépendront en fait très fortement de la nature de l'équation (1) elle-même. Pour illustrer cela, regardons quelques exemples simples dans $\mathbb{R}^2$:

1. La solution générale de l'équation $u_x = 0$ est donnée par $u(x, y) = f(y)$ où f est une fonction arbitraire. Et donc, l'équation $u_x = 0$ donne une complète description du comportement de u par rapport à la variable x (u est constante), mais aucune indication du comportement de u par rapport à la variable y .
2. Toute solution de l'équation de Cauchy-Riemann $u_x + iu_y = 0$ est une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + iy$, et donc est de classe C^∞ . Cette équation impose donc des restrictions très fortes sur toutes les dérivées de u .

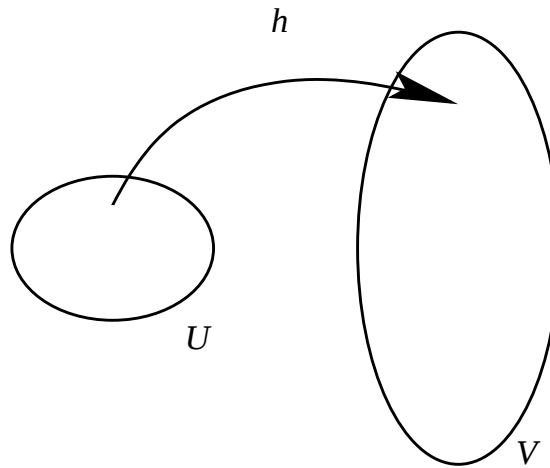
Nous verrons dans la suite de ce cours quelques méthodes pour aborder l'étude de ces problèmes.

Annexe : Construction des mesures de surface et preuve de la formule de Green-Ostrogradsky.

Cette annexe est donnée à titre d'information. Elle ne pourra faire l'objet de questions à l'examen, et peut donc être passée au cours de la lecture.

Nous allons définir les intégrales de surface.

Considérons tout d'abord la situation suivante. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $h : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme.



Il est bien entendu possible de calculer le volume de V par une intégrale sur U grâce au théorème de changement de variables : Si $x \in V$ et si on écrit que $x = h(x')$ avec $x' \in U$, alors

$$\text{Vol } V = \int_V dx = \int_U |Jh(x')| dx'$$

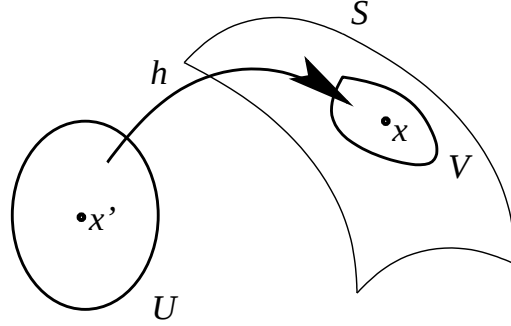
où $|Jh(x')|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de h au point $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$.

Si on interprète les “éléments de volume” de la physique en termes de mesure, on en déduit que la mesure de Lebesgue dx dans V est la mesure

image de la mesure dx' de U par h , c'est-à-dire la mesure de densité $|Jh(x')|$ par rapport à la mesure de Lebesgue dans U .

L'interprétation physique de la valeur absolue du jacobien est classique : c'est le volume du parallélépipède engendré par les n vecteurs $\frac{\partial h}{\partial x'_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x'_n}$. Nous allons utiliser cette approche pour définir la notion d'intégrale de surface.

Soit S une sous-variété de classe C^1 de dimension k plongée dans $\mathbb{R}^n$.



Si x est un point de S , on sait que par définition, il existe un ouvert V de S contenant x , un ouvert U de $\mathbb{R}^k$ et une application $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qui est un homéomorphisme de U dans V et telle que de plus, les vecteurs $\frac{\partial h}{\partial x'_1}(x'), \dots, \frac{\partial h}{\partial x'_k}(x')$ soient linéairement indépendants pour tout $x' \in U$. Autrement dit, l'espace vectoriel tangent à S en x existe et il est engendré par les k vecteurs $\frac{\partial h}{\partial x'_1}(x'), \dots, \frac{\partial h}{\partial x'_k}(x')$ avec x' tel que $h(x') = x$.

On dira que l'élément de surface sur S au point x sera, par définition, l'élément de surface dx dans U multiplié par le volume k -dimensionnel $J_k h(x')$ du k -parallélépipède engendré par les vecteurs

$$\frac{\partial h}{\partial x'_1}(x'), \dots, \frac{\partial h}{\partial x'_k}(x')$$

où x' est tel que $h(x) = x'$. Autrement dit, si $V_k(V)$ désigne le volume k -dimensionnel de V , on a

$$V_k(V) = \int_U |J_k h(x')| dx'.$$

Il résulte du théorème de changement de variable dans une intégrale que cette intégrale ne dépend pas du choix de U et de h . En effet, si U' est un autre ouvert de $\mathbb{R}^k$ et si h' est une autre application $U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qui est un homéomorphisme de U' dans V et tels que de plus, les vecteurs $\frac{\partial h'}{\partial x'_1}(x'), \dots, \frac{\partial h'}{\partial x'_k}(x')$ soient linéairement indépendants pour tout $x' \in U'$, alors il existe un C^1 -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow U'$ tel que $h' \circ \varphi = h$ (car les cartes (U, h) et (U', h') sont compatibles ; cela résulte aussi du théorème du rang constant, voir par exemple le livre d'A. Avez, Calcul Différentiel, Masson, page 86). En particulier, $J_k(h')(\varphi(x')) \times J\varphi(x') = J_k(h)(x')$ où $J\varphi$ désigne le jacobien de φ , et donc

$$V_k(V) = \int_U |J_k h(x')| dx' = \int_{U'} |J_k h'(x')| dx'.$$

Pour calculer le k -volume engendré par k vecteurs, on pourrait par exemple fixer une base orthonormale de l'espace vectoriel engendré par ces k vecteurs et considérer le déterminant de ces k vecteurs dans cette base. Mais il est beaucoup plus simple d'utiliser les déterminants de Gram, car le calcul du k -volume engendré par ces k vecteurs ne fera pas intervenir le choix d'une base qui serait parfois difficile à construire.

Proposition : Si $x_1, \dots, x_k$ sont k vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $k \leq n$, alors le carré du k -volume du k -parallélépipède engendré par les k vecteurs $x_1, \dots, x_k$ est égal au déterminant, dit de Gram :

$$G(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k, x_1 \rangle & \dots & \langle x_k, x_k \rangle \end{vmatrix},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Considérons $e_1, \dots, e_k$ une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_k$. Si on écrit $x_i = \sum_{\ell=1}^k \lambda_{i,\ell} e_\ell$, alors $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{\ell=1}^k \lambda_{i,\ell} \lambda_{j,\ell}$. En particulier, si $M = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$, alors $G(x_1, \dots, x_k) = \det(M^t M) = (\det M)^2$. Enfin, il est clair que le k -volume recherché vaut $|\det M|$.

Exercice A : Calculez la longueur d'une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$, d'une courbe gauche dans $\mathbb{R}^3$, la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (utiliser les coordonnées sphériques), la longueur d'une courbe donnée en coordonnées polaires dans le plan, en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, etc...

Intégration sur la sphère unité. Considérons $\mathbb{S}_n$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire que $\mathbb{S}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Soit

$$\Omega = \underbrace{]0, \pi[\times \dots \times]0, \pi[\times]}_{n-2 \text{ fois}} - \pi, \pi[\subset \mathbb{R}^{n-1}$$

et soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_n$ l'application donnée par

$$\begin{cases} \varphi_1(\theta) &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\ \varphi_2(\theta) &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ \varphi_3(\theta) &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \vdots &= \vdots \\ \varphi_{n-1}(\theta) &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \varphi_n(\theta) &= \cos \theta_1 \end{cases}$$

On a $\varphi(\Omega) = \mathbb{S}_n$, à un ensemble négligeable près. Calculons le $(n-1)$ -volume engendré par les $n-1$ vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_{n-1}}$: un calcul direct nous donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} = 0 \quad \text{pour } i \neq j,$$

et

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \right\|^2 = 1, \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} \right\|^2 = \sin^2 \theta_1, \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_3} \right\|^2 = \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2, \quad \dots, \\ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_{n-1}} \right\|^2 = \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{n-2}.$$

Et donc,

$$\sqrt{G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_{n-1}} \right)} = \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2}.$$

D'où, si σ est la mesure sur $\mathbb{S}_n$ image par φ de la mesure de Lebesgue dans Ω , et si f est une fonction définie sur $\mathbb{S}_n$ σ -intégrable,

$$\int_{\mathbb{S}_n} f(\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{\Omega} (f \circ \varphi)(\theta) \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}.$$

Coordonnées sphériques. On considère la décomposition sphérique d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ selon $x = r\zeta$ avec $r = \|x\|$ et $\zeta \in \mathbb{S}_n$. En reprenant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, introduisons l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\mathcal{D} =]0, +\infty[\times \Omega$$

et considérons l'application $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\psi(r, \theta) = r\varphi(\theta).$$

Alors ψ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathcal{D}$ sur $\psi(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^n$. De plus, $\mathbb{R}^n \setminus \psi(\mathcal{D})$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. La matrice jacobienne de ψ est composée de vecteurs deux à deux orthogonaux (car on a vu que les $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}$ étaient deux à deux orthogonaux et engendrent l'espace vectoriel tangent à la sphère de rayon r au point $\psi(r, \theta)$, qui est orthogonal à $\psi(r, \theta)$ donc aussi à $\frac{\partial \psi}{\partial r}$). La valeur absolue du jacobien est donc égal au produit des normes des vecteurs qui composent la matrice jacobienne, et donc

$$|J\psi(r, \theta)| = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2}.$$

En particulier, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathcal{D}} (f \circ \psi)(r, \theta) r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} d\theta dr \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} r^{n-1} \int_{\Omega} (f(r\varphi(\theta))) \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} d\theta dr \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} r^{n-1} \int_{\mathbb{S}_n} f(r\zeta) d\sigma(\zeta) dr. \end{aligned}$$

Preuve de la formule de Green-Ostrogradsky. Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ et $S = \partial\Omega$ qu'on suppose de classe C^1 . Soit F un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$. Nous allons montrer que

$$\int_S F(y) \cdot \vec{n}(y) d\sigma(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx.$$

Première étape. Tout d'abord, montrons que, si F est de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, alors on peut prolonger F à un voisinage de Ω .

Pour cela, on remarque que, pour tout $x_0 \in S$, il existe un ouvert V contenant x_0 tel qu'on ait $S \cap V = \{\varphi = 0\}$ où $\varphi \in C^1(V)$ est telle que $\nabla \varphi$

ne s'annule pas sur $V \cap S$. Nous pouvons résoudre l'équation $\varphi = 0$ près de x et obtenir pour une certaine coordonnée x_n

$$S = \{x, x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

dans un ouvert U contenant x_0 . Quitte à restreindre un peu U , on peut supposer que U est une boule centrée en x_0 et que $U \cap \Omega = \{x, x_n < \psi(x')\}$ où $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et que l'application Ψ qui à $x \in U$ associe $(x', x_n - \psi(x'))$ est un difféomorphisme de U dans $\Psi(U) = U'$. Enfin, $\Psi(U \cap \Omega) = U' \cap \{x_n < 0\}$.

L'application $F' = F \circ \Psi^{-1}$ sera définie et de classe C^1 sur $U' \cap \{x_n \leq 0\}$ puisque F est de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$.

Nous pouvons maintenant étendre la fonction F' sur U' en une fonction $\tilde{F}'$ de classe C^1 : il suffit de prendre par exemple

$$\tilde{F}'(x) = F'(0, x') + x_n \frac{\partial F'}{\partial x_n}(0, x')$$

pour $x_n > 0$. Enfin, pour étendre la fonction F à U tout entier, il suffit de considérer

$$\tilde{F} = \tilde{F}' \circ \Psi,$$

ce qui clôt la première étape.

Seconde étape. Montrons que la formule de Green-Ostrogradsky est vraie si F est à support compact dans Ω . Dans ce cas, on a $F = 0$ dans un voisinage du bord $\partial\Omega$ de Ω . Il suffit donc de montrer que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = 0.$$

Tout d'abord, on peut recouvrir le support de F par une réunion finie de pavés de la forme $\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$.

En utilisant une partition de l'unité adaptée à cette famille de pavés, nous voyons qu'il suffit de prouver cette formule dans le cas où le support de F est inclus dans un pavé $P = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$.

Nous allons montrer que

$$\int_P \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0,$$

la preuve des égalités

$$\int_P \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0$$

étant tout à fait analogues.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_P \frac{\partial F_1}{\partial x_1} &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_n \dots dx_2 dx_1 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_n \dots dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} (F_1(b_1, x_2, \dots, x_n) - F_1(a_1, x_2, \dots, x_n)) dx_n \dots dx_2 = 0 \end{aligned}$$

car $F_1(b_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(a_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. On a donc terminé la preuve de la seconde étape.

En recouvrant le bord de Ω par des petits pavés puis en utilisant une partition de l'unité adaptée à ce recouvrement, on voit qu'il suffit de prouver la formule de Green-Ostrogradsky dans le cas où le support de F est dans un petit voisinage d'un point x_0 du bord de Ω .

Troisième étape. Montrons la formule de Green-Ostrogradsky dans le cas où le support de F est dans un petit voisinage d'un point x_0 du bord de Ω . Nous pouvons comme précédemment supposer que, dans ce voisinage V , on a $\Omega \cap V = \{x, x_n < \psi(x')\}$ et $S \cap V = \{x, x_n = \psi(x')\}$.

Le vecteur normal extérieur à Ω en $x \in \partial\Omega$ unitaire est

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^2}} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}, 1 \right)$$

et l'élément de surface de S en x est

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^2} dx_1 \dots dx_{n-1},$$

formule à vérifier en exercice (Exercice B). On a alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \sum_{j=1}^n \int_{\{x_n < \psi(x')\}} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} dx$$

Posons $y' = x'$ et $y_n = x_n - \psi(x')$, $G(y) = F(y', y_n + \psi(y'))$. On a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\{y_n < 0\}} \left(\frac{\partial G_j}{\partial y_j} - \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \frac{\partial G_j}{\partial y_n} \right) dy + \int_{\{y_n < 0\}} \frac{\partial G_n}{\partial y_n} dy.$$

Or, pour $j = 1, \dots, n-1$, on a :

$$\int_{\{y_n < 0\}} \frac{\partial G_j}{\partial y_j} = 0$$

puisque G est à support compact. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx &= - \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\{y_n < 0\}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial G_j}{\partial y_n} dy + \int_{\{y_n < 0\}} \frac{\partial G_n}{\partial y_n} dy \\ &= - \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\{y' \in \mathbb{R}^{n-1}\}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} G_j(y', 0) dy' + \int_{y' \in \mathbb{R}^{n-1}} G_n(y', 0) dy'. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x) &= - \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} F_j(x', \psi(x')) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x') dx' \\ &\quad + \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} F_n(x', \psi(x')) dx', \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée. On a donc terminé la preuve de l'étape 3 et par là terminé la preuve de la formule de Green-Ostrogradsky.