

Chapitre 3

Espaces métriques complets

1. Complétude.

1.1. Définition, premier exemples.

★ **1.1.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de E . On dit que (x_n) est une *suite de Cauchy* si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq n_0) \text{ et } (q \geq n_0) \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

On dit que (E, d) est *complet* si et seulement si toute suite de Cauchy de E converge.

Si E est un espace vectoriel normé qui est complet pour la métrique associée à la norme, on dit alors que E est un *espace de Banach*.

★ 1.1.2. Propriétés.

- *Toute suite convergente est de Cauchy.*
- *Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
- *Toute suite de Cauchy est bornée.*
- *Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente converge.*

Preuve. Exercice 3.1.

L'intérêt des espaces métriques complets est, on le verra, de fabriquer de nouveaux objets à l'aide de processus sommatoires, séries absolument convergentes, transformation d'Abel ; ou d'approximations successives : Théorème du point fixe, Théorème de Cauchy-Lipschitz ; de fournir des prolongements de fonctions, en vue par exemple de construire l'intégrale de Riemann ou de trouver les intervalles de définition de solutions maximales d'équations différentielles.

★ **1.1.3. Théorème.** $\mathbb{R}$ est un espace de Banach.

Preuve. Considérer pour cela une suite de Cauchy de réels (x_n) . Posons $A_n = \{x_k, k \geq n\}$ et soit la suite (y_n) définie par $y_n = \sup A_n$. Cette suite est bien définie, car (x_n) étant de Cauchy, elle est bornée d'après la propriété 1.1.2, et donc les ensembles A_n sont des ensembles non vides majorés de $\mathbb{R}$ qui admettent une borne supérieure.

La suite (y_n) est une suite décroissante (car $A_{n+1} \subset A_n$ implique $\sup A_{n+1} \leq \sup A_n$) minorée car (x_n) l'est, donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il reste à montrer qu'il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers ℓ , et la propriété 1.1.2 montrera que la suite (x_n) converge vers ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(y_n)_n$ tend vers ℓ , il existe un rang N tel que, $n \geq N$ implique $\ell - \varepsilon < y_n \leq \ell + \varepsilon$. En particulier, $y_N \leq \ell + \varepsilon$, donc, pour tout $n \geq N$, $x_n \leq y_N \leq \ell + \varepsilon$.

Soit $K \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à N . On a $y_K > \ell - \varepsilon$ et donc il existe un entier $n \geq K$ tel que $x_n > \ell - \varepsilon$.

Et donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall K \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq K, \quad \ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon. \quad (*)$$

Il reste à construire par récurrence sur n la fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})$ tende vers ℓ .

Supposons construits $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(N)$ tels que, pour tout $k \leq N$,

$$\ell - \frac{1}{k+1} \leq x_{\varphi(k)} \leq \ell + \frac{1}{k+1}.$$

Si on applique $(*)$ à $\varepsilon = \frac{1}{N+2}$ et $K = \varphi(N) + 1$, on obtient l'existence de $n > \varphi(N)$ tel que

$$\ell - \frac{1}{N+2} \leq x_n \leq \ell + \frac{1}{N+2}.$$

Il suffit de poser $\varphi(N+1) = n$ pour conclure. $\square$

1.1.4. Remarque. En fait, la limite ℓ précédente s'appelle la limite supérieure de la suite (x_n) . Nous verrons dans le chapitre sur la compacité qu'une suite bornée de $\mathbb{R}$ admet un ensemble de valeurs particulières que l'on appelle valeurs d'adhérence. Par définition, ces valeurs d'adhérences sont les limites éventuelles des suites extraites de (u_n) , et la limite supérieure est la borne supérieure de l'ensemble de ces valeurs d'adhérence, et est elle-même une valeur d'adhérence.

1.1.5. Exemples.

- $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet, la suite $\left(\frac{[n\sqrt{2}]}{n}\right)_n$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas (dans $\mathbb{Q}$).

- $]0, 1]$ muni de la distance usuelle n'est pas complet.

- Nous verrons plus loin que $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ munis des distances usuelles sont complets.

Plus généralement, on verra dans le chapitre portant sur la compacité que tout espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach, quelle que soit la norme.

★ 1.1.6. Théorème. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E . Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m > n > n_\varepsilon) \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^m u_k \right\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, $\sum \|u_n\|$ converge implique $\sum u_n$ converge, autrement dit, la convergence absolue entraîne la convergence.

Preuve. Exercice 3.2.

★ **1.1.7. Corollaire.** *En particulier, toute série de nombres réels ou complexes absolument convergente est convergente. La réciproque est bien entendue fausse comme le montre l'exemple $\sum (-1)^n/n$.*

★ **1.1.8. Proposition.** *Soit X un ensemble, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est un espace de Banach.

Preuve. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{B}(X, E)$, de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de E car $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$. Comme E est complet, il existe $y \in E$ tel que $(f_n(x))$ tende vers y . On construit comme cela une fonction $f : X \rightarrow E$ qui à $x \in X$ associe $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Il reste alors à vérifier que $f \in \mathcal{B}(X, E)$ et que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Vérifions donc que f ainsi construite est un élément de $\mathcal{B}(X, E)$. Pour cela, on utilise le fait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, quels que soient n, m supérieurs ou égaux à N , on a $\|f_n - f_m\|_\infty \leq 1$. En particulier, si $m \geq N$, on a

$$\forall x \in X, \quad \|f_m(x)\| \leq \|f_N(x)\| + 1,$$

et donc, le théorème de passage à la limite appliqué à cette inégalité quand m tend vers $+\infty$ nous montre que

$$\forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leq \|f_N(x)\| + 1$$

(on rappelle que si (u_n) est une suite de E qui converge vers ℓ , alors $\|u_n\|$ converge vers $\|\ell\|$ car $x \mapsto \|x\|$ est continue de E dans $\mathbb{R}_+$ (cette application est 1-lipschitzienne, cela découle de l'inégalité triangulaire)). En particulier, si $M \geq 0$ est tel que, pour tout $x \in E$, $\|f_N(x)\| \leq M$, alors, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M + 1$, ce qui montre que $f \in \mathcal{B}(X, E)$.

Montrons que $\|f - f_N\|_\infty$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Comme (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m \geq n \geq N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

soit encore que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m \geq n \geq N) \Rightarrow \forall x \in X, \quad \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon,$$

et donc, en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow \forall x \in X, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon,$$

soit encore que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

et donc $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$

★ **1.1.9. Remarque.** Ce qui précède est la démarche générale pour montrer qu'un espace fonctionnel ou qu'un espace de suites est complet. Par exemple, pour montrer que $\mathcal{F}$ espace fonctionnel est complet, on prend une suite (f_n) de Cauchy pour la norme de $\mathcal{F}$. Pour tout x , on pose $f(x) = \lim f_n(x)$. On vérifie que $f \in \mathcal{F}$ et que f_n tend vers f pour la topologie de $\mathcal{F}$.

Dans le même esprit, nous avons les théorèmes suivants :

★ **1.1.10. Théorème.** Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, alors l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des fonctions linéaires continues de E dans F muni de la norme associée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ est un espace de Banach.

Preuve. Exercice 3.3. $\square$

★ **1.1.11. Théorème.** Le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ℓ^2 des suites de complexes (a_n) telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ converge est complet pour la norme

$$\|(a_n)\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Preuve. Notons tout d'abord que ℓ^2 est bien un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel : si (a_n) et (b_n) sont dans ℓ^2 , l'inégalité $|a_n + b_n|^2 \leq (|a_n| + |b_n|)^2 \leq 2(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ montre que la somme $(a_n + b_n)$ est dans ℓ^2 . De même directement pour $\lambda(a_n)$ si $\lambda \in \mathbb{C}$. Ensuite, $\|\cdot\|_2$ est bien une norme par passage à la limite dans l'inégalité de Minkowski. Passons à la complétude.

Soit $p \mapsto (a^p)$ une suite de Cauchy de ℓ^2 , où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a^p = (a_n^p)_n$. La condition de Cauchy se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq p_\varepsilon \text{ et } q \geq p_\varepsilon) \implies \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^p - a_n^q|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Comme $|a_n^p - a_n^q| \leq \|a^p - a^q\|_2$, on constate que, pour chaque n fixé, la suite $p \mapsto (a_n^p)$ est de Cauchy, donc converge, mettons vers a_n . On retrouve alors les deux problèmes usuels :

α. Montrer que la suite (a_n) est dans ℓ^2 .

β. Montrer que la suite $p \mapsto (a_n^p)_p$ converge effectivement dans ℓ^2 vers (a_n) .

Pour α), on écrit que, pour tout N fixé dans $\mathbb{N}$,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq p_1 \text{ et } q \geq p_1) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^N |a_n^q - a_n^p|^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

On bloque $p \geq p_1$ et l'on passe de façon licite à la limite quand $q \rightarrow +\infty$ dans la somme finie (ce ne serait pas possible si la somme était infinie !) pour obtenir

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p \geq p_1) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^N |a_n - a_n^p|^2 \right)^{1/2} \leq 1,$$

d'où, pour $p = p_1$ (en usant des propriétés de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$)

$$\left(\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq 1 + \left(\sum_{n=0}^N |a_n^{p_1}|^2 \right)^{1/2} \leq 1 + \|a^{p_1}\|_2.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n=0}^N |a_n|^2$ sont donc bornées donc la série converge.

β) reprend en grande partie les idées ci-dessus. Bloquant $\varepsilon > 0$ puis p_ε et N , on obtient

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq p_\varepsilon \text{ et } q \geq p_\varepsilon) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^N |a_n^q - a_n^p|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon$$

d'où, par passage à la limite licite

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p \geq p_\varepsilon) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^N |a_n - a_n^p|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon,$$

puis en faisant tendre N vers $+\infty$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p \geq p_\varepsilon) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_n^p|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

□

Nous allons nous intéresser maintenant à la notion de transfert de complétude. Tout d'abord, on remarque que cette notion de complétude n'est pas une propriété topologique. Par exemple, $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est un espace métrique complet, tandis que si on le munit de la métrique $d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ qui est équivalente à la métrique usuelle, alors $\mathbb{R}$ n'est plus complet (*cf.* Exercice 3.4). Néanmoins, nous avons la proposition :

1.1.12. Proposition. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ uniformément continue.

- i. Si (x_n) est une suite de Cauchy dans E , la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy dans F .
- ii. Si de plus, f est bijective et f^{-1} est continue alors, si F est complet, E est complet.

Preuve. Exercice 3.5.

★ **1.1.13. Corollaire.**

- i. Soient d_1 et d_2 deux distances sur E . Si $d_1 \stackrel{u}{\sim} d_2$ alors, (E, d_1) est complet si et seulement si (E, d_2) est complet.
- ii. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques isométriques. Alors (E_1, d_1) est complet si et seulement si (E_2, d_2) est complet.

1.2. Lien entre complet et fermé.

★ **1.2.1. Proposition.** Soit (E, d) un espace métrique et F une partie complète de E . Alors F est fermé dans E .

Réciproquement, si F est une partie fermée de E , et si E est complet, alors F est complet.

Preuve. Exercice 3.6.

★ **1.2.2. Corollaire.** Dans les espaces métriques complets, les parties complètes pour la métrique induite sont exactement les parties fermées.

★ **1.2.3. Théorème des fermés emboîtés.** Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit (F_n) une suite décroissante (pour l'inclusion, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$) et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(F_n) = 0$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend un élément x_n de F_n . La suite (x_n) ainsi définie est de Cauchy. En effet, si p et q sont supérieurs ou égaux à n , alors $x_p \in F_p \subset F_n$ et $x_q \in F_q \subset F_n$ donc $d(x_p, x_q) \leq \delta(F_n)$ et $\delta(F_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite (x_n) est donc convergente car E est complet. Soit ℓ sa limite. Comme, pour tout $m \geq n$, on a $x_m \in F_m \subset F_n$ et que F_n est fermé, on en déduit qu'en faisant tendre m vers $+\infty$, on a $\ell \in F_n$. Et donc $\ell \in \bigcap F_n$, ce qui prouve que $\bigcap F_n$ est non vide. Il reste à montrer que $\bigcap F_n$ ne contient que cet élément ℓ . Soit donc ℓ' un élément de $\bigcap F_n$. En particulier, si $n \in \mathbb{N}$, on a ℓ' et ℓ qui sont dans F_n , et donc $d(\ell, \ell') \leq \delta(F_n)$. Faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $d(\ell, \ell') = 0$, soit que $\ell = \ell'$. $\square$

1.3. Produits d'espaces métriques complets.

★ **1.3.1. Théorème.** Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques complets. On muni le produit $\prod_{i=1}^n E_i$ de la distance D_j définie dans le sous-paragraphe 4.2. du chapitre 1. Alors $(\prod_{i=1}^n E_i, D_j)$ est un espace métrique complet.

Preuve. Exercice 3.7 $\square$

★ **1.3.2. Corollaire.** Les espaces $\mathbb{R}^n$ munis des normes usuelles, et les espaces $\mathbb{C}^n$ identifiés à $\mathbb{R}^{2n}$ sont complets.

2. Prolongements de fonctions

2.1. Critère de Cauchy et prolongements

2.1.1. Théorème. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et A une partie de E . Si f possède une limite au point a de E selon la partie A , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (CC)$$

Réciproquement, si (F, d') est complet, la propriété (CC) (pour Critère de Cauchy) entraîne l'existence d'une limite de f au point a selon A .

Preuve. Le fait que (CC) est nécessaire est évident. Nous supposons donc cette dernière condition vérifiée. Il faut alors montrer que f possède une limite en a . Pour cela, nous utiliserons le théorème 1.2.9 du chapitre 2. Comme F est complet, il suffit de montrer que, quelle que soit la suite (u_n) de points de A qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ est de Cauchy. Or la condition (CC) implique bien ce résultat. $\square$

2.1.2. Corollaire. Soient $a < b$ deux réels, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, dérivable dont la dérivée est bornée sur $]a, b[$. Alors f possède un prolongement continu sur $[a, b]$.

Preuve. Tout d'abord, f est dérivable sur $]a, b[$ donc continue sur $]a, b[$. Il suffit de montrer que f admet une limite en a et en b . Soit K un nombre strictement positif tel que, pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq K$. Le théorème des accroissements finis nous dit alors que f est K -lipschitzienne. Mais alors f vérifie le critère de Cauchy en a et en b car si l'on se donne $\varepsilon > 0$ et si $\alpha = \frac{\varepsilon}{K}$ il vient, pour tout couple (x, y) de $[b - \alpha, b]^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq K\alpha \leq \varepsilon$$

et de même en a , d'où l'existence des limites.

Remarque. Le caractère lipschitzien de l'application suffit pour obtenir le prolongement.

2.2. Prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense

2.2.1. Théorème. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, F étant complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F . Il existe une unique application continue g de E dans F qui prolonge f , de plus, g est uniformément continue

Preuve. Ecrivons d'abord la traduction de l'uniforme continuité de f :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in A^2, \quad d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Cette expression montre que le critère de Cauchy est vérifié en tout point de E . f possède donc une extension naturelle g à E fournie par

$$g(x) = \lim_{a \rightarrow x} f(a).$$

Montrons que g est uniformément continue : soit (x, y) dans $E \times E$ tel que $d(x, y) < \alpha$ et soient (a_n) et (b_n) deux suites de points de A qui convergent vers x et y respectivement. La continuité de la distance fait que $d(a_n, b_n) < \alpha$ à partir d'un certain rang N , donc

$$d'(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon \quad \text{pour } n \geq N.$$

Comme par construction les suites $f(a_n)$ et $f(b_n)$ convergent vers $f(x)$ et $f(y)$ respectivement, il vient $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$, d'où le résultat. Il reste à vérifier l'unicité. Supposons que g' soit une autre extension continue de f à E .

Lemme. *L'ensemble B des points x de E tels que $g'(x) = g(x)$ est fermé.*

Admettons ce lemme pour un instant. B contient A et $\overline{A} = E$, donc $B = E$, ce qui montre que $g = g'$ et prouve le théorème. Il reste donc à prouver le lemme.

Pour cela, soit (x_n) une suite de points de B qui converge vers $x \in E$. Il nous faut montrer que $x \in B$ pour pouvoir conclure. Par continuité de g , on a $g'(x) = \lim(g'(x_n))$ et $g(x) = \lim(g(x_n))$. Or, comme pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $g'(x_n) = g(x_n)$, on en déduit que $g(x) = g'(x)$ et donc que $x \in B$. $\square$

2.2.2. Application. *Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.* Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow E$ où E est un espace de Banach. On dit que f est en escalier si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, f soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$ et vaut $\lambda_i \in E$.

On dit que f est réglée sur $[a, b]$ s'il existe une suite de fonctions (f_n) en escaliers qui convergent uniformément vers f sur $[a, b]$.

On verra que toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow E$ est réglée (en fait, les fonctions réglées sont les fonctions qui admettent des limites à droite et à gauche en tous les points de $[a, b]$).

L'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ en escalier est donnée par la formule

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \lambda_i$$

où $a = x_0 < \dots < x_n = b$ est une subdivision adaptée à f et λ_i la valeur constante que prend f sur l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$. On vérifie sans peine (en commençant par le cas où l'une des subdivisions est plus fine que l'autre, puis en considérant leur réunion) que la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie, ce qui entraîne la linéarité de l'intégrale et le fait que

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq (b - a) \|f\|_\infty.$$

L'intégrale se prolonge donc en une forme linéaire de même norme sur l'espace des fonctions réglées. Dans le cas des fonctions réelles, on vérifie alors la conservation des caractères positifs, puis croissant, etc. . .

3. Théorème du point fixe

Le théorème qui suit est très important et est un des théorèmes qui a le plus d'applications dans l'analyse.

★ **3.1. Théorème (Banach, 1922).** *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $f : E \rightarrow E$ une application contractante (c'est-à-dire que f est k -lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$). Alors f possède un et seul point fixe $\ell \in E$ (c'est à dire qu'il existe un et un seul $\ell \in E$ tel que $f(\ell) = \ell$). De plus, si $x_0 \in E$ et si (x_n) est la suite donnée par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (x_n) est convergente et converge vers ℓ .*

Preuve. Tout d'abord, on vérifie l'unicité du point fixe. Supposons que ℓ et ℓ' soient deux points fixes. On a $d(\ell, \ell') = d(f(\ell), f(\ell')) \leq kd(\ell, \ell')$ donc $(1 - k)d(\ell, \ell') \leq 0$, ce qui implique que $d(\ell, \ell') \leq 0$ car $k < 1$, et donc $d(\ell, \ell') = 0$, soit encore $\ell = \ell'$.

Soit maintenant $x_0 \in E$ et (x_n) la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}).$$

Or une récurrence immédiate nous donne $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. (la faire !). En particulier, on obtient que

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) k^n \sum_{i=0}^{p-1} k^i \\ &\leq d(x_0, x_1) \frac{k^n}{1 - k}. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq k < 1$, la suite k^n tend vers 0 et l'on vérifie de là le critère de Cauchy : la suite (x_n) converge vers $\ell \in E$. Il reste à vérifier que ℓ est un point fixe de f . Par continuité de f , $(f(x_n))_n$ converge vers $f(\ell)$. Comme $(f(x_n)) = (x_{n+1})$ converge aussi vers ℓ , on en déduit que $\ell = f(\ell)$.

★ **3.2. Remarques.**

1. L'hypothèse $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ n'implique pas que f est une contraction.
2. L'hypothèse E complet est fondamentale. Par exemple, si $E =]0, 1]$ et $f(x) = x/2$, alors f est contractante et n'a pas de point fixe dans E .
3. Cette méthode des itérations est un excellent outil de calcul numérique des valeurs approchées du point fixe.

Exercices.

Exercices d'apprentissage.

Exercice 3.1. Montrez la proposition 1.1.2

Exercice 3.2. Montrez la proposition 1.1.6

Exercice 3.3. Montrez la proposition 1.1.10

Exercice 3.4. Montrez que la distance $d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ sur $\mathbb{R}$ est topologiquement équivalente à la distance usuelle mais que $\mathbb{R}$ muni de cette distance n'est pas complet (considérer la suite $(u_n) = (n)$).

Exercice 3.5. Montrez la proposition 1.1.12

Exercice 3.6. Montrez la proposition 1.2.1

Exercice 3.7. Montrez la proposition 1.3.1.

Exercices d'approfondissement.

Exercice 3.8. *Métrique complète sur $\mathbb{N}$.* Soit $a > 0$ quelconque. On définit d par $d(n, n) = 0$ et pour $m \neq n$,

$$d(m, n) = a + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$ et que $(\mathbb{N}, d)$ est complet.

Exercice 3.9. *Intersection et réunions de parties complètes.*

1. Montrer que toute intersection de parties complètes de E est une partie complète de E .
2. Montrer que toute réunion finie de parties complètes de E est une partie complète de E . Et les réunions infinies ?

Exercice 3.10. $E = (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. Trouver une suite (f_n) de Cauchy dans E qui ne converge pas dans E pour la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

(Pour chaque n , couper $[0, 1]$ en trois intervalles tels que f_n soit nulle sur le premier, affine sur le second, égale à 1 sur le troisième.).

Exercice 3.11. c et c_0 sont complets. Soit c le sous-espace vectoriel des suites qui convergent et c_0 celui des suites qui convergent vers 0. On les considère comme sous-espaces de ℓ^∞ , c'est à dire qu'on les munit de la distance induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que c_0 et c sont fermés dans ℓ^∞ . Montrez que ℓ^∞ est complet, et donc que c_0 et c sont complets.

Exercice 3.12. Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $[0, 1]$.

1. Montrez que

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty}{1 + \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty}$$

définit une distance sur cet espace. (on rappelle que pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, $\|f\|_\infty$ est fini.

2. Montrez que (E, d) est complet (on utilisera le théorème suivant : si (f_n) est une suite de fonctions C^1 qui convergent simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction g et si la suite (f'_n) des dérivées converge uniformément vers la fonction h , alors g est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $g' = h$).

Exercice 3.13. *Insuffisance de $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour le théorème du point fixe.* Trouver un exemple simple de fonctions $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow A$ vérifiant l'inégalité ci-dessus et ne possédant aucun point fixe.

Exercice 3.14. *Théorème du point fixe.* Montrer que le théorème du point fixe possède l'extension suivante. Soit $f : E \rightarrow E$, avec E complet. On suppose qu'il existe un entier $p > 0$ tel que f^p soit une contraction.

- Montrer que f possède un point fixe x et que celui-ci est unique.
- Montrer que x s'obtient comme limite de la suite $x_k = f(x_{k-1})$, $x_0 \in E$ arbitraire (on montrera que, pour tout $i = 0, 1, \dots, p-1$, $f^{pm}(x_i)$ tend vers x et on pensera à une division euclidienne).

Exercice 3.15. *Une application du théorème du point fixe aux équations différentielles : Théorème de Cauchy-Lipschitz.* Soit l'équation différentielle

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{E}$$

telle que f soit une fonction continue dans un voisinage V d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et telle qu'il existe M tel que, pour tous (x, y_1) et (x, y_2) dans V , on ait

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|.$$

Montrer qu'il existe un voisinage J de x_0 sur lequel (E) possède une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$. On étudiera sur l'espace $E = (C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ avec $I = [x_0 - \frac{1}{4M}, x_0 + \frac{1}{4M}]$, la fonction $F : g \mapsto h$ définie par

$$F(g)(x) = h(x) = \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt + y_0.$$

Exercice 3.16. *Equation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.* Soit $K : (s, t) \mapsto K(s, t) \in \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$; soit g une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. L'équation intégrale

$$f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) f(t) dt = g(s) \quad (E)$$

où f est la fonction inconnue est appelée l'équation de Fredholm de deuxième espèce ; K est son "noyau".

Montrer que, pour λ assez petit, (E) possède dans $E = (C([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ une solution unique f .

Exercice 3.17. *Le théorème de Baire.*

Soit (E, d) un espace métrique complet.

1. Soit (O_n) une suite d'ouverts de E . On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, O_n est dense dans E . Montrez que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est dense dans E (ce n'est pas forcément un ouvert !). Pour cela, soit O un ouvert non vide de E . Montrer qu'il existe une suite décroissante de boules fermées $B'(a_n, r_n)$ avec $r_n \leq \frac{1}{n+1}$ toutes dans O et telles que (a_n) soit une suite de Cauchy (procéder de proche en proche sur $O_0 \cap O$, sur $O_1 \cap B(a_0, r_0)$, etc...).
2. Soit (F_n) une suite de fermés d'intérieurs vides. Montrez que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide.
3. Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Montrez qu'il n'existe pas de base algébrique de E dénombrable (supposer qu'il existe une base (e_n) de E et s'intéresser au sous-espace $F_n = \text{Vect}\{e_0, \dots, e_n\}$).
4. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{K}[X]$. Montrez que $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$ n'est pas un espace de Banach.

Corrigé des exercices d'apprentissage.

Exercice 3.1. Montrons que toute suite convergente est de Cauchy. Soit (x_n) une suite convergeant vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 in $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq n_0) \text{ et } (q \geq n_0) \quad \Rightarrow \quad d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(x_q, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Et donc (x_n) est de Cauchy.

Soit (x_n) une suite de Cauchy et $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$ (cela se prouve par récurrence et cela a été fait auparavant). En particulier, si (x_n) est de Cauchy, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq n_0) \text{ et } (q \geq n_0) \quad \Rightarrow \quad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq n_0) \text{ et } (q \geq n_0) \quad \Rightarrow \quad d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy.

Montrons que toute suite de Cauchy est bornée. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Il existe un rang n_1 tel que, pour tous p, q dans $\mathbb{N}$ supérieurs ou égaux à n_1 , on ait $d(x_p, x_q) \leq 1$. En particulier, pour tout $n \geq n_1$, $x_n \in B(x_{n_1}, 2)$. Notons $R = \max(d(x_0, x_{n_1}), d(x_1, x_{n_1}), \dots, d(x_{n_1-1}, x_{n_1}), 2)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B(x_{n_1}, R+1)$ ce qui montre que (x_n) est bornée.

Montrons que toute suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente converge. Soit (x_n) une suite de Cauchy et soit $(x_{\varphi(n)})$ la suite extraite qui converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad d(x_{\varphi(n)}, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme (x_n) est de Cauchy, il existe un rang n'_ε tel que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p \geq n'_\varepsilon) \text{ et } (q \geq n'_\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

En particulier, si $n \geq \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, on en déduit que

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de la suite (x_n) vers ℓ .

Exercice 3.2. Dire que $\sum u_n$ converge revient à dire que la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_n$ converge. Et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_n$ est de Cauchy, soit si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m > n > n_\varepsilon) \Rightarrow \left\| \sum_{k=0}^m u_k - \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq \varepsilon,$$

soit encore si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m > n > n_\varepsilon) \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^m u_k \right\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, si $\sum \|u_n\|$ converge,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m > n > n_\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|u_k\| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m > n > n_\varepsilon) \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^m u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|u_k\| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que $\sum u_n$ converge.

Exercice 3.3. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme associée $\|\cdot\|$. On va montrer que la suite (f_n) converge. Tout d'abord, si $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy car

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \|f_n - f_m\| \|x\|_E.$$

Comme F est un espace de Banach, on en déduit que la suite $(f_n)(x)$ converge vers un y et on notera $y = f(x)$.

La fonction ainsi construite est linéaire : en effet, si $x, x' \in E$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(x + \lambda x') &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x + \lambda x') = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) + \lambda f_n(x')) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda f_n(x')) = f(x) + \lambda f(x'). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que f est continue et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

On a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad (m \geq N) \text{ et } (n \geq N) \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq 1,$$

soit encore

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B_E, \quad (m \geq N) \text{ et } (n \geq N) \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq 1.$$

Si on fait tendre m vers $+\infty$ et si on fixe $n = N$, alors

$$\forall x \in B_E, \quad \|f(x) - f_N(x)\|_F \leq 1,$$

ce qui implique que

$$\forall x \in B_E, \quad \|f(x)\|_F \leq \|f_N(x)\|_F + 1,$$

et donc

$$\sup_{x \in B_E} \|f(x)\| \leq \|f_N\| + 1,$$

ce qui montre que f est bornée sur la boule unité fermée de E , et donc que f est continue en vertu du théorème 1.6.1 du chapitre 2.

Il reste à vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Pour cela, on reprend la démarche précédente : on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad (m \geq N) \text{ et } (n \geq N) \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique encore que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B_E, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \\ (m \geq N) \text{ et } (n \geq N) \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B_E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien prouvé que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Exercice 3.4. Pour vérifier que les topologies sont identiques, il suffit de vérifier que si une suite (u_n) converge vers ℓ pour une distance, alors elle converge vers ℓ pour l'autre distance d'après la proposition 1.5.2 du chapitre 2. Si (u_n) converge vers ℓ pour la métrique usuelle, alors $\frac{u_n}{1+|u_n|}$ converge vers $\frac{\ell}{1+|\ell|}$ car $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est continue, et donc (u_n) converge vers ℓ pour la distance d .

Enfin, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ pour la distance d , alors la suite $\frac{u_n}{1+|u_n|}$ converge vers $\frac{\ell}{1+|\ell|}$. La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

est un homéomorphisme ayant pour homéomorphisme réciproque

$$f^{-1} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$$

En particulier, on a

$$u_n = f^{-1}\left(\frac{u_n}{1 + |u_n|}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{\ell}{1 + |\ell|}\right) = \ell.$$

On a donc bien prouvé que d définit la même topologie sur $\mathbb{R}$ que la distance usuelle. Cependant, la suite (n) est de Cauchy pour d mais ne converge pas dans $\mathbb{R}$. En effet, si elle convergerait dans $\mathbb{R}$ vers ℓ , on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n}{1 + n} - \frac{\ell}{1 + |\ell|} \right| = 0.$$

Comme $\frac{n}{1+n}$ converge vers 1, on en déduit que $\frac{\ell}{1+|\ell|} = 1$, ce qui est impossible.

Exercice 3.5.

- i. Montrons que si (x_n) est de Cauchy, alors $(f(x_n))$ aussi. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Comme (x_n) est de Cauchy, il existe N tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq N) \text{ et } (q \geq N) \quad \Rightarrow \quad d(x_p, x_q) \leq \alpha.$$

Et donc,

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq N) \text{ et } (q \geq N) \quad \Rightarrow \quad d(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon.$$

- ii. Si F est complet, la suite $(f(x_n))$ converge vers $\ell \in F$. Et donc (x_n) converge vers $f^{-1}(\ell)$. On en déduit que E est complet.

Exercice 3.6. Montrons que si F est une partie complète de E , alors F est fermée. Pour cela, soit (x_n) une suite de F convergeant dans E vers x . Pour montrer que F est fermée, il faut montrer qu'on a nécessairement $x \in F$. Comme (x_n) converge dans E , on en déduit que (x_n) est de Cauchy dans F pour la métrique induite. Comme F est complet, on en déduit que (x_n) converge vers y dans F . La suite (x_n) converge donc dans E vers y aussi. Par unicité de la limite, on a $y = x$ et donc $x \in F$.

Montrons maintenant que si F est une partie fermée de E et si E est complet, alors F est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans F pour la métrique induite. Comme E est complet et que (x_n) est aussi une suite de Cauchy dans E , on en déduit que (x_n) converge vers $x \in E$. Comme F est fermé, on en déduit que $x \in F$, ce qui prouve que (x_n) est une suite convergente dans F .

Exercice 3.7. Les D_j sont des distances uniformément équivalentes à la distance D_∞ car on a

$$D_\infty \leq D_j \leq n^{1/j} D_\infty.$$

D'après le corollaire 1.1.13, il suffit de montrer que $(\prod_{i=1}^n E_i, D_\infty)$ est complet. Soit $(x_p)_p = (x_{1,p}, \dots, x_{n,p})$ une suite de Cauchy pour la distance D_∞ . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$d_i \leq D_\infty$$

et donc la suite $(x_{i,p})_p$ est de Cauchy dans E_i qui est complet. On en déduit que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite $(x_{i,p})_p$ converge vers $x_i \in E_i$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, et si $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe donc un rang N_i tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p \geq N_i \Rightarrow d_i(x_{i,p}, x_i) \leq \varepsilon.$$

Si on pose $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p \geq N \Rightarrow D_\infty(x_p, x) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que (x_p) converge.