Chapitre 3.

Représentations intégrales des solutions des équations de transport, de Laplace, de la chaleur et des ondes.

Le but de ce chapitre est d'étudier quatre classes d'équations aux dérivées partielles relativement simples, de donner une formule de représentation intégrale explicite des solutions de ces équations et d'étudier les propriétés de ces solutions. Ces équations sont aux nombres de quatre : c'est l'équation de transport, de Laplace, de la chaleur et des ondes. Ces opérateurs ont une importance fondamentale, non seulement à cause de leurs applications mais aussi parce qu'ils sont l'archétype de phénomènes plus généraux. En effet, l'étude de la plupart des équations aux dérivées partielles repose sur l'étude de ces opérateurs. Nous commençons par la plus simple de ces équations : l'équation de transport.

1. Equation de transport

On se donne $\xi \in \mathbb{R}^n$ et g une fonction de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$. On cherche à trouver une fonction u de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et telle que

$$\begin{cases} u_t + \xi \cdot \nabla u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1} \\ u(0,x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Une méthode très simple pour résoudre un tel problème est une méthode qui est un cas particulier d'une méthode beaucoup plus générale pour résoudre les équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre (que nous étudierons plus loin) : la méthode dite *"des caractéristiques"*.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé et

$$\varphi : \mathbb{R} \ni s \mapsto (\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)) = (s, x_1 + \xi_1 s, \dots, x_n + \xi_n s) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Cette fonction φ est évidemment de classe C^∞. Supposons maintenant qu'il existe une fonction u solution de (1).

Considérons maintenant la fonction $\widetilde{u}(s) = u(\varphi(s))$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1. On a alors

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{u}'(s) = u_t(\varphi(s)) + \xi_1 u_{x_1}(\varphi(s)) + \cdots + \xi_n u_{x_n}(\varphi(s)) = 0,$$

donc $\widetilde{u}$ est constante et vaut $\widetilde{u}(0) = u(0, x_1, \dots, x_n) = g(x)$.

En particulier, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$$u(s, x_1 + \xi_1 s, \dots, x_n + \xi_n s) = g(x).$$

En particulier, si $(T, X_1, \dots, X_n)$ est un point de $\mathbb{R}^{n+1}$, alors il existe $s \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} T = s \\ X_1 = x_1 + \xi_1 s \\ \qquad \vdots \\ X_n = x_n + \xi_n s. \end{cases}$$

Il suffit de prendre $s = T$, puis $x_1 = X_1 - \xi_1 T$, ..., $x_n = X_n - \xi_n T$. Et donc, si u est une solution de (1), alors

$$\forall (T, X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad u(T, X_1, \dots X_n) = g(X_1 - \xi_1 T, X_n - \xi_n T).$$

En d'autres termes, on a :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad u(t, x) = g(x - t\xi). \tag{2}$$

Réciproquement, il est facile de voir que la fonction u définie par la formule (2) est effectivement solution de (1). En conclusion, nous avons le résultat suivant :

1.1. Proposition. *Soient $\xi \in \mathbb{R}^n$ et g une fonction de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une et une seule fonction u de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que*

$$\begin{cases} u_t + \xi \cdot \nabla u = 0 \ \textit{dans } \mathbb{R}^{n+1} \\ u(0, x) = g(x) \ \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

De plus, on a :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad u(t,x) = g(x - t\xi). \tag{2}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'équation de transport non homogène, c'est à dire au problème suivant.

On se donne $\xi \in \mathbb{R}^n$, g une fonction de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}^{n+1}$. On cherche à trouver une fonction u de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et telle que

$$\begin{cases} u_t + \xi \cdot \nabla u = f \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1} \\ u(0,x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1'}$$

On reprend la méthode précédente. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé et

$$\varphi : \mathbb{R} \ni s \mapsto (\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)) = (s, x_1 + \xi_1 s, \ldots, x_n + \xi_n s) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Cette fonction φ est évidemment de classe C^∞. Supposons maintenant qu'il existe une fonction u solution de $(1')$.

Considérons maintenant la fonction $\widetilde{u}(s) = u(\varphi(s))$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1. On a alors

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{u}'(s) = u_t(\varphi(s)) + \xi_1 u_{x_1}(\varphi(s)) + \cdots + \xi_n u_{x_n}(\varphi(s)) = f(\varphi(s))$$

donc

$$\widetilde{u}(s) = \widetilde{u}(0) + \int_{r=0}^{s} f(\varphi(r))dr = g(x) + \int_{r=0}^{s} f(\varphi(r))dr,$$

soit encore

$$u(s, x_1 + s\xi_1, \ldots, x_n + s\xi_n) = g(x_1, \ldots, x_n) + \int_{r=0}^{s} f(r, x_1 + r\xi_1, \ldots, x_n + r\xi_n)dr.$$

Faisant la même manipulation que précédemment, nous obtenons

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad u(t,x) = g(x - t\xi) + \int_{r=0}^{t} f(r, x + (r-t)\xi)dr. \tag{2'}$$

Réciproquement, on laisse en exercice au lecteur le fait de voir que la fonction u définie par la formule $(2')$ est effectivement solution de $(1')$. En conclusion, nous avons le résultat suivant :

1.2. Proposition. *Soient $\xi \in \mathbb{R}^n$, f une fonction continue sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et g une fonction de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une et une seule fonction u de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que*

$$\begin{cases} u_t + \xi \cdot \nabla u = f \textit{ dans } \mathbb{R}^{n+1} \\ u(0,x) = g(x) \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1'}$$

De plus, on a :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad u(t,x) = g(x - t\xi) + \int_{r=0}^{t} f(r, x + (r-t)\xi)dr. \tag{2'}$$

Exercice 3.1. *Vérifier que la fonction u définie par l'équation* $(2')$ *est bien solution de* $(1')$*.*

Exercice 3.2. *La méthode des caractéristiques.* On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles linéaire dans $\mathbb{R}^n$ du premier ordre

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} + b(x)u(x) = c(x)$$

où les fonctions $a_1, \ldots, a_n, b$ et c sont des fonctions de $x \in \mathbb{R}^n$ données et u est la fonction de $x \in \mathbb{R}^n$ inconnue. On suppose de plus que la fonction u est connue sur une hypersurface S et que, pour tout $x \in S$, $u(x) = \phi(x)$ où ϕ est une fonction donnée sur S. L'idée pour résoudre cette équation est de prendre $x_0 \in S$ et de considérer, si elle existe, la solution $x : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ (où $\varepsilon > 0$) du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1(x(t)) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_n(x(t)) \end{cases}$$

telle que $x(0) = x_0$. La courbe image par l'application x de l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ sera une courbe C_{x_0} passant par x_0. De plus, si $\widetilde{u}(t) = u(x(t))$, alors

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \qquad \widetilde{u}'(t) + b(x(t))\widetilde{u}(t) = c(x(t)) \tag{1''}$$

et

$$\widetilde{u}(0) = \phi(x_0). \tag{2''}$$

En particulier, si on peut intégrer l'équation différentielle $(1'')$ avec la condition initiale $(2'')$, on en déduira l'expression de $\widetilde{u}$ puis l'expression de u le long de la courbe C_{x_0}. Il ne restera plus qu'à “remplir”, à l'aide des courbes C_{x_0} quand x_0 bougera dans S, un voisinage de S pour obtenir une expression de u localement au voisinage de S.

1. Vérifiez les formules $(1'')$ et $(2'')$.

2. En appliquant la méthode des caractéristiques à l'équation de transport (homogène, puis non homogène), retrouver les formules obtenues précédemment.

3. Résoudre par la méthode des caractéristiques dans $\mathbb{R}^3$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 3u(x, y, z)$$

avec $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$. Résoudre par la méthode des caractéristiques dans $\mathbb{R}^2$

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = u^2(x, y)$$

avec $u(x, 2x) = 1$.

2. Equation de Laplace.

Parmi les équations les plus importantes de la théorie des équations aux dérivées partielles se trouve sans aucun doute l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = f$$

Interprétation physique. L'équation de Laplace intervient très fréquemment dans des problèmes de la physique. u représente typiquement la densité d'une quantité (comme, par exemple, la concentration chimique d'un produit) en équilibre. En effet, si V est un sous-ensemble ouvert de Ω ayant pour bord une hypersurface de classe C^1, le flux de u à travers $\partial\Omega$ est nul :

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\ d\sigma = 0,$$

où $\vec{F}$ désigne le flux de la densité et $\vec{n}$ désigne le vecteur normal unitaire. La formule de Green-Riemann nous donne

$$\int_V \text{div}\ \vec{F} = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\ d\sigma = 0,$$

et donc

$$\text{div}\ \vec{F} = 0$$

puisque V est arbitraire. Dans la plupart des situations, il est physiquement raisonnable de supposer que le flux $\vec{F}$ est proportionnel au gradient ∇u, mais pointe dans la direction opposée. Et donc,

$$\vec{F} = -a\nabla u, \qquad a > 0.$$

Et donc, on a

$$\operatorname{div} \nabla u = \Delta u = 0.$$

Si u désigne la ou le

$$\begin{cases} \text{concentration chimique} \\ \text{température} \\ \text{potentiel éléctrostatique,} \end{cases}$$

l'équation

$$\vec{F} = -a\nabla u$$

est

$$\begin{cases} \text{la loi de Fick de la diffusion} \\ \text{la loi de Fourier de la conduction de la chaleur} \\ \text{la loi d'Ohm de la conduction de l'éléctricité.} \end{cases}$$

Enfin, l'équation de Laplace intervient encore en analyse complexe et dans l'interprétation probabiliste du mouvement brownien.

2.1. Action du laplacien sur les fonctions radiales.

Tout d'abord, nous commençons par exprimer le Laplacien pour les fonctions f dites radiales, c'est-à-dire les fonctions dont la valeur $f(x)$ ne dépend que de $\|x\|$.

2.1.1. Proposition. *Si $f(x) = \phi(r)$ où $x \in \mathbb{R}^n$ et $r = \|x\|$ et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors*

$$\Delta f(x) = \phi''(r) + \frac{n-1}{r}\phi'(r)$$

Exercice 3.3. *Prouver la proposition 2.1.1 précédente.*

2.1.2. Corollaire. *Sous les hypothèses précédentes, $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si et seulement si $\phi(r) = a + br^{2-n}$ si $n \neq 2$ ou $\phi(r) = a + b\log r$ si $n = 2$ où a et b sont des constantes.*

Exercice 3.4. *Prouver le corollaire 2.1.2 précédent.*

2.1.3. Définition. Une fonction u définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 et à valeurs complexes est dite *harmonique* si $\Delta u = 0$ (Nous verrons plus loin dans le corollaire qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse $u \in C^2$ sans changer quoique ce soit).

2.2. Propriétés de base des fonctions harmoniques.

Nous allons obtenir quelques propriétés de base des fonctions harmoniques. Dans ce qui suit, nous intégrerons sur des hypersurfaces S qui seront les bords de domaines Ω (c'est-à-dire des ouverts connexes) de $\mathbb{R}^n$. $d\sigma$ sera la mesure de surface sur S et $\vec{n}$ sera le vecteur normal unitaire sur S pointant à l'extérieur de Ω.

2.2.1. Identités de Green. *Si Ω est un domaine borné avec un bord C^1 et si u et v sont des fonctions de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, alors*

$$\int_S v\ \partial_{\vec{n}} u\ d\sigma = \int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx$$

et

$$\int_S (v\ \partial_{\vec{n}} u - u\ \partial_{\vec{n}} v) d\sigma = \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dx.$$

2.2.2. Corollaire. *Si u est harmonique dans Ω, alors*

$$\int_S \partial_{\vec{n}} u\ d\sigma = 0.$$

Exercice 3.5. *Vérifier les identités de Green et le corollaire.*

Nous allons maintentant énoncer l'un des théorèmes fondamentaux concernant les fonctions harmoniques : le théorème de la valeur moyenne. Ce théorème dit, en termes imagés, qu'une fonction harmonique est en un point la valeur moyenne des valeurs prises par cette fonction au voisinage de ce point. On conçoit ainsi l'intérêt des fonctions harmoniques en physique.

2.2.3. Théorème de la moyenne. *Si u est harmonique dans un ouvert Ω, si $x \in \Omega$ et si $r > 0$ est suffisamment petit de façon à ce que $\overline{B_r(x)}$ soit incluse dans Ω, alors*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_n} u(x+ry) d\sigma_n(y),$$

où ω_n est la surface de $\mathbb{S}_n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. On remarque tout d'abord que la seconde égalité découle de la première grâce au changement de variables $y \mapsto x + ry$. En translatant, on peut supposer que $0 \in \Omega$ et que $x = 0$.

Exercice 3.6. *Prouver le théorème sous les hypothèses précédentes auxquelles on s'est ramené. On appliquera la formule de Green-Riemann avec pour* *u notre fonction harmonique et* $v(y) = \|y\|^{2-n}$ *si* $n \neq 2$ *ou* $v(y) = \log \|y\|$ *si* $n = 2$ *et* $\Omega = B_r(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$. *Faire ensuite tendre* ε *vers* 0 *en utilisant la continuité de u.*

2.2.4. Corollaire. *Sous les hypothèses et notations précédentes, on a*

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)dy = \frac{1}{Vol\ B_r(x)} \int_{B_r(x)} u(y)dy$$
$$= \frac{1}{Vol\ \mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} u(x+ry)dy.$$

Exercice 3.7. *Prouver le corollaire précédent.*

Exercice 3.8. La réciproque du théorème de la moyenne. *On se propose de montrer que si u est une fonction continue sur un sous-ensemble ouvert possédant la propriété de la valeur moyenne, c'est-à-dire que*

$$\forall x \in \Omega, \qquad \forall r > 0 \text{ tel que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega, \qquad u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_n} u(x+ry)d\sigma_n(y),$$

alors u est de classe C^∞ *sur* Ω *et u est harmonique sur* Ω.

1. *Montrer qu'il existe une fonction* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *à support compact de classe* C^∞ *telle que la fonction* $\phi(x) = \psi(\|x\|)$ *soit de classe* C^∞ *à support compact dans* $\mathbb{B}_n$ *telle que* $\int \phi = 1$.

Pour $\varepsilon > 0$, *nous posons* $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}x)$ *et* $\Omega_\varepsilon = \{x \ :\ \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega\}$.

2. *Montrer que, si* $x \in \Omega_\varepsilon$, *la fonction* $y \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ *a son support dans* Ω *et que nous avons*

$$\int u(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = \int_0^1 \int_{\mathbb{S}_n} u(x - r\varepsilon y)\psi(r)r^{n-1}d\sigma_n(y)dr = u(x).$$

En déduire que u est C^∞.

3. *Montrer que*

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \int_{\mathbb{S}_n} u(x+ry)d\sigma_n(y) = r^{1-n} \int_{S_r(x)} \partial_{\vec{n}} u\ d\sigma_n = r^{1-n} \int_{B_r(x)} \Delta u.$$

En déduire u est harmonique.

4. *Montrer que toute fonction harmonique est de classe* C^∞.

Voici maintenant d'autres propriétés importantes des fonctions harmoniques :

2.2.5. Principe du maximum. *Si* Ω *est un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^n$ *et si u est une fonction harmonique à valeurs réelles sur* Ω *vérifiant* $\sup_\Omega u = A < \infty$, *alors soit* $u < A$ *sur* Ω *ou bien* $u(x) = A$ *pour tout* $x \in \Omega$.

2.2.6. Corollaire. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit compact et si u est harmonique et à valeurs réelles sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors la borne supérieure de u sur $\overline{\Omega}$ est atteinte sur $\partial\Omega$.*

2.2.7. Théorème d'unicité. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit compact et si u_1 et u_2 sont deux fonctions harmoniques continues sur $\overline{\Omega}$ telles que $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, alors $u_1 = u_2$ sur Ω.*

Exercice 3.9. *Prouver le principe du maximum, son corollaire et le théorème d'unicité. On pourra poser $B = \{x \in \Omega,\ u(x) = A\}$, montrer que B est fermé et ouvert dans Ω grâce au théorème de la moyenne, puis conclure en utilisant la connexité de Ω.*

Exercice 3.10. *On se propose de montrer le théorème de Liouville, c'est-à-dire que si une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$ est bornée, alors elle est constante. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $R > \|x\|$.*

1. *En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que*

$$|u(x) - u(0)| \leq \frac{n}{R^n \omega_n} \|u\|_\infty \, Vol\ D$$

où D est la différence symétrique des boules $B_R(x)$ et $B_R(0)$.

2. *Montrer que D est contenu dans l'ensemble des y tels que*

$$R - \|x\| \leq \|y\| < R + \|x\|.$$

En déduire que

$$|u(x) - u(0)| \leq \|u\|_\infty \frac{(R + \|x\|)^n - (R - \|x\|)^n}{R^n},$$

puis conclure.

Exercice 3.11. *On se propose de montrer que si une fonction u est harmonique dans un ouvert Ω, alors on peut estimer les dérivées de u de tous ordres en fonction des valeurs de u (ce qui est aussi le cas pour les fonctions holomorphes mais ce qui est faux en général pour les fonctions quelconques). Plus précisément, nous allons montrer que, si une boule $B_r(x_0)$ est incluse dans Ω, alors*

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u|$$

pour tous les multi-indices α tels que $|\alpha| = k$, où

$$C_0 = \frac{1}{Vol\ \mathbb{B}_n} \quad et \quad C_k = \frac{(2^{2n+1+\frac{k+1}{2}} n)^k}{2^{n+1}\, Vol\ \mathbb{B}_n}.$$

Quitte à faire une translation, on peut supposer que $x_0 = 0 \in \Omega$.

1. *montrez que c'est vrai si* $k = 0$.

2. *Supposons* $k = 1$. *Montrez que*

$$\partial_i u(0) = \frac{2^n}{r^n \, Vol \, \mathbb{B}_n} \int_{B_{\frac{r}{2}}(0)} \partial_i u dx = \frac{2^n}{r^n \, Vol \, \mathbb{B}_n} \int_{S_{\frac{r}{2}}(0)} u \frac{2x_i}{r} d\sigma$$

(on pourra utiliser une des formules de Green).

3. *En utilisant les estimations faites pour* $k = 0$ *pour les points de* $S_{\frac{r}{2}}(0)$, *en déduire le résultat pour* $k = 1$.

4. *Prouver le résultat en faisant une récurrence sur* k.

5. *En déduire une autre preuve du théorème de Liouville.*

2.3. Solutions fondamentales du Laplacien.

2.3.1. Théorème. *Posons*

$$E(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \|x\|^{2-n} \text{ pour } n > 2 \qquad \text{et } E(x) = \frac{1}{2\pi} \log \|x\| \text{ pour } n = 2.$$

Alors E *est une solution fondamentale du laplacien dans* $\mathbb{R}^n$, *c'est-à-dire que*

$$\Delta E = \delta_0$$

au sens des distributions, où δ_0 *est la masse de Dirac en* 0.

Exercice 3.12. *On se propose de montrer le théorème précédent. Supposons* $n = 2$ *et posons*

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log \|x\|.$$

1. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et*

$$E_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \log(\|x\|^2 + \varepsilon^2).$$

Montrer que E_ε *converge vers* E *au sens des distributions sur* $\mathbb{R}^2$ *quand* ε *tend vers* 0.

2. *Calculer* ΔE_ε *au sens des distributions.*

3. *En déduire le théorème.*

4. *Suivre la même démarche dans le cas* $n > 2$ *avec*

$$E_\varepsilon(x) = \frac{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{(2-n)/2}}{(2-n)\omega_n}.$$

Il pourra être utile de poser $u = \frac{t^2}{(t^2+1)}$ *dans une certaine intégrale.*

En particulier, grâce au théorème 2.3.1, nous pouvons résoudre l'équation de Laplace non homogène $\Delta u = f$ pour n'importe quelle distribution à support compact en posant $u = E * f$. En fait, cette formule est aussi valable pour les fonctions f sans support compact pourvu qu'elles satisfassent des conditions entraînant la convergence d'intégrales appropriées. Voici une version plus précise de cette observation :

2.3.2. Théorème. *Supposons $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\int |f(y)| \log \|y\| dy < +\infty$ si $n = 2$. Alors $f * E$ est une fonction bien définie et localement intégrable, et $\Delta(f * E) = f$.*

Preuve. Nous supposons que $n > 2$ et nous laissons le cas $n = 2$ au lecteur (Exercice 3.13.). Soit χ_r la fonction caractéristique de la boule $B_r(0)$. Alors $\chi_1 E \in L^1$ et $(1-\chi_1)E \in L^\infty$; et donc $f*(\chi_1 E) \in L^1$ et $f*[(1-\chi_1)E] \in L^\infty$. De plus, $\chi_r f \to f$ dans L^1 quand $r \to \infty$, donc $(\chi_r f) * (\chi_1 E) \to f * (\chi_1 E)$ dans L^1 et $(\chi_r f)*[(1-\chi_1)E] \to f*[(1-\chi_1)E]$ dans L^∞. En particulier, $\chi_r f$ et $(\chi_r f) * E$ convergent respectivement vers f et $f * E$ au sens des distributions. Et donc, puisque $\chi_r f$ a un support compact, on en déduit que

$$\Delta[f * E] = \lim \Delta[(\chi_r f) * E] = \lim \chi_r f = f,$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.3.2.

Une autre application intéressante de la solution fondamentale E, c'est la formule de représentation suivante des fonctions harmoniques dans un domaine Ω en termes des valeurs au bord de f et des dérivées normales de f. Pour cela, il est utile de regarder E comme une fonction de deux variables $x, y \in \mathbb{R}^n$ via la formule

$$E(x, y) = E(x - y).$$

Quand nous différentierons $E(x, y)$, nous indiquerons toujours si la dérivation est par rapport à x ou à y en mettant en indice la variable x ou y, par exemple $\partial_{\vec{n},y} E(x, y)$ désigne la dérivée normale par rapport à la variable y.

2.3.3. Théorème. *Soit Ω un domaine borné avec un bord S de classe C^1. Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ est harmonique dans Ω, alors*

$$\forall x \in \Omega, \qquad u(x) = \int_S [u(y)\partial_{\vec{n},y} E(x, y) - \partial_{\vec{n}} u(y) E(x, y)]\, d\sigma(y).$$

Exercice 3.14. *Prouver le théorème précédent. On pourra considérer E_ε au lieu de E, appliquer la formule de Green et faire tendre ε vers 0.*

Le théorème 2.3.3. suggère que, si on a à résoudre le problème

$$\Delta u = 0 \in \Omega, \qquad u = f \quad \text{et} \quad \partial_{\vec{n}} u = g \quad \text{sur } S,$$

alors, on peut le résoudre en posant

$$u(x) = \int_S \left[f(y) \partial_{\vec{n},y} E(x,y) - g(y) E(x,y) \right]. \tag{3}$$

En fait, cela ne marche pas. En effet, nous savons d'après le théorème d'unicité que la solution u (si elle existe) est complètement déterminée par f seule. La fonction u définie par (3) sera harmonique dans Ω puisque $E(x,y)$ et $\partial_{\vec{n}_y} E$ sont des fonctions harmoniques de $x \in \Omega$ quand $y \in S$, mais elle n'aura pas les valeurs appropriées au bord de Ω sauf si f et g satisfont des conditions particulières, que nous ne préciserons pas.

2.4. Fonctions de Green.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné dont le bord est une hypersurface S de classe C^1. On se propose d'obtenir une formule de représentation pour la solution de l'équation de Poisson

$$\Delta u = f$$

sachant que u vérifie la condition au bord

$$u = g \qquad \text{sur } S.$$

Supposons tout d'abord que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est une fonction arbitraire. Fixons $x \in \Omega$ et choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $B_\varepsilon(x) \subset U$, et appliquons la formule de Green au domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ aux fonctions $u(y)$ et $E(x,y)$. Nous avons

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u(y) \Delta_y E(x,y) - E(x,y) \Delta u(y))\, dy = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} (u(y) \partial_{\vec{n},y} E(x,y) - E(x,y) \partial_{\vec{n},y} u(y))\, d\sigma(y).$$

Comme $\Delta_y E(x,y) = 0$ pour $x \neq y$, que

$$\left| \int_{S_\varepsilon(x)} E(x,y) \partial_{\vec{n},y} u(y) \; d\sigma(y) \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \max_{S_\varepsilon(0)} |E|$$

tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et que

$$\int_{S_\varepsilon(x)} u(y)\partial_{\vec{n},y}E(x,y)d\sigma(y) = \frac{1}{\text{Surface } S_\varepsilon(x)} \int u(y)d\sigma(y)$$

tend vers $u(x)$ quand $\varepsilon \to 0$, on en déduit que

$$u(x) = \int_S \left[u(y)\partial_{\vec{n},y}E(x,y) - \partial_{\vec{n}}u(y)E(x,y)\right] d\sigma(y) + \int_\Omega E(x,y)\Delta u(y)\, dy \quad (4)$$

(Nous laissons au lecteur le soin de retrouver cette formule en adoptant la démarche de l'exercice 3.14 (Exercice 3.15.)).

Nous allons maintenant utiliser cette formule pour résoudre notre problème. Pour cela, nous allons modifier notre formule afin de supprimer le terme portant sur $\partial_{\vec{n},y}u$. L'idée est d'introduire pour x fixé la fonction correctrice $\phi^x(y)$ qui est la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta\phi^x &= \quad 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \phi^x &= E(x,.) \quad \text{sur } S. \end{cases}$$

Appliquons une nouvelle fois la formule de Green, pour obtenir

$$0 = -\int_\Omega \phi^x(y)\Delta u(y)dy - \int_S \left(u(y)\partial_{\vec{n},y}\phi^x(y) - \phi^x(y)\partial_{\vec{n}}u(y)\right) d\sigma.$$

Additionnons maintenant cette formule avec (4) et posons

$$G(x,y) = +E(x,y) - \phi^x(y), \text{ pour } x,y \in \Omega, x \neq y,$$

nous obtenons le théorème suivant :

2.4.1. Théorème. *Supposons que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est une solution de*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \textit{dans } \Omega \\ u &= g \quad \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions données dans Ω et sur $\partial\Omega$ et continues. Alors

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\partial_{\vec{n},y}G(x,y)d\sigma(y) + \int_\Omega f(y)G(x,y)dy.$$

2.4.2. Définition. On appelle *fonction de Green* du domaine Ω la fonction G précédemment définie.

La fonction $\partial_{\vec{n},y}G(x,y)$ pour $x \in \Omega$ et $y \in \partial\Omega$ sera, quand à elle, appelée le *noyau de Poisson* du domaine Ω

Nous avons donc une formule de représentation de u en fonction des valeurs de u au bord, pourvu qu'on ait pu construire une fonction de Green du domaine Ω. Malheureusement, le problème de cette construction est une question difficile et qui ne peut pas être faite explicitement en général. Seuls quelques cas particuliers peuvent être traités : la boule en fait partie, et nous traiterons cette situation dans la suite. Faisons tout d'abord une liste des propriétés élémentaires des fonctions de Green :

Remarque. Si on fixe $x \in \Omega$ et si on regarde G comme une fonction de y alors,

$$\begin{cases} \Delta G &= \delta_x \quad \text{dans } \Omega \\ G &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où δ_x est la masse de Dirac au point x.

Nous avons aussi le théorème important suivant qui met en évidence le caractère symétrique de la fonction de Green :

2.4.3. Théorème. *Pour tous $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, nous avons*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Preuve. Fixons x et y dans Ω tels que $x \neq y$. Posons

$$v(z) = G(x,z) \qquad \text{et} \qquad w(z) = G(y,z) \qquad \text{pour } z \in \Omega.$$

Alors $\Delta v(z) = 0$ pour $z \neq x$, $\Delta w(z) = 0$ pour $z \neq y$ et $w = v = 0$ sur $\partial\Omega$. En appliquant l'identité de Green sur $V = \Omega \setminus (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))$ pour ε suffisamment petit, on obtient

$$\int_{S_\varepsilon(x)} (w\ \partial_{\vec{n}}v - v\ \partial_{\vec{n}}w)d\sigma = \int_{S_\varepsilon(y)} (v\ \partial_{\vec{n}}w - w\ \partial_{\vec{n}}v)d\sigma \tag{5}$$

où $\vec{n}$ désignera cette fois-ci la normale <u>intérieure</u> aux boules $B_\varepsilon(x)$ et $B_\varepsilon(y)$. Cependant, w est continue donc bornée près de x ; et donc

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} v\ \partial_{\vec{n}}w\ d\sigma \right| \leq C\varepsilon^{n-1} \sup_{S_\varepsilon(x)} |v|$$

qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ à cause de la forme de G et donc de v.

D'autre part, $v(z) = E(z,x) - \phi^x(z)$ où ϕ^x est continue dans Ω. Donc,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon(x)} w\ \partial_{\vec{n}} v\ d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon(x)} w\ \partial_{\vec{n},y} E\ d\sigma = w(x)$$

(*cf.* voir le début du paragraphe 2.4). Et donc, le membre de gauche de (5) converge vers $w(x)$ quand $\varepsilon \to 0$. De manière analogue, le membre de droite converge vers $v(y)$, et donc

$$G(y,x) = w(x) = v(y) = G(x,y),$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.4.3.

Nous allons maintenant construire explicitement la fonction de Green pour un domaine très simple, à savoir la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Pour construire la fonction de Green de $\mathbb{B}_n$, il suffit pour x fixé dans $\mathbb{B}$, de construire une fonction "correctrice" ϕ^x telle que $\Delta\phi^x = 0$ dans $\mathbb{B}$ et telle que $\phi^x = E(x,.)$ sur $\mathbb{S}$. Pour cela, on remarque que nous avons le lemme suivant :

Lemme. *Si* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *et* $y \in \mathbb{S}$, *on a*

$$\|x-y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|\ y \right\|.$$

Preuve du lemme : En exercice (Exercice 3.16.)

En particulier, la fonction $y \in \mathbb{B} \mapsto \phi^x(y) = E(x/\|x\|, \|x\|y)$ convient, car si x est fixé dans $\mathbb{B}$, c'est une fonction clairement harmonique de $y \in \mathbb{B}$. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les formules obtenues dans $\mathbb{R}^n$ pour les solutions de l'équation de Poisson avec conditions aux bord. (Exercice 3.17).

L'objet du pararagraphe suivant est de maintenant s'intéresser à l'équation de la chaleur.

3. Equation de la Chaleur.

Nous étudions maintenant l'équation de la chaleur

$$u_t - \Delta_x u = 0$$

et l'équation de la chaleur non homogène

$$u_t - \Delta_x u = f$$

assujeties à des conditions au bord et des conditions initiales convenables. Ici, $t > 0$ désigne le temps, $x \in U$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. L'inconnue est $u : \overline{U} \times [0, +\infty[$, $u = u(x,t)$ et le laplacien Δ_x désigne le Laplacien par rapport à la variable d'espace $x = (x_1, \dots, x_n)$. Dans la seconde équation, $f : U \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est donnée.

Interprétation physique. L'équation de la chaleur, aussi appelée équation de la diffusion, décrit dans des applications typiques l'évolution dans le temps de la densité u d'une certaine quantité telle que la chaleur, la concentration chimique, *etc...* Si $V \subset U$ est une partie régulière de U, le taux de variation de la quantité totale dans V est égale à l'opposé du flux de la densité à travers ∂V :

$$\frac{d}{dt} \int_V u\, dx = - \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma,$$

et donc

$$u_t = -\text{div } \vec{F},$$

puisque V est arbitraire. Dans la plupart des situations, $\vec{F}$ est proportionelle au gradient de u, mais pointe dans la direction opposée (puisque le flot part des régions où la concentration est plus importante pour aller vers les régions où celle-ci est moins importante). Et donc

$$\vec{F} = -a \nabla u \qquad (a > 0).$$

En particulier, on obtient $u_t - a\Delta_x u = 0$, ce qui pour $a = 1$ nous redonne l'équation de la chaleur.

3.1. Solution de l'équation de la chaleur homogène avec donnée initiale.

Nous nous intéressons au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Notons

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \end{cases}$$

Nous appellerons cette fonction Φ le *noyau de la chaleur.*

Exercice 3.18. *Montrez que Φ est une solution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[$, et montrez que, pour tout $t>0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x,t)dx=1$.*

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Supposons $g\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R})$ et définissons*

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)dy.$$

Alors u est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[$,

$$u_t(x,t)-\Delta_x u(x,t)=0,\qquad (x\in\mathbb{R}^n,\ t>0),$$

et

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(0,x_0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} = g(x_0),\qquad \text{pour tout } x_0\in\mathbb{R}^n.$$

Preuve. Puisque la fonction $\frac{1}{t^{n/2}}e^{-\|x\|^2/4t}$ est infiniment dérivable, avec des dérivées uniformément bornées et uniformément intégrables de tous ordres sur $\mathbb{R}^n\times[\delta,+\infty[$ pour tout $\delta>0$, nous voyons que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[$. De plus,

$$u_t(x,t)-\Delta_x u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}[(\Phi_t-\Delta_x\Phi)(x-y,t)]g(y)\,dy=0$$

pour $x\in\mathbb{R}^n$ et $t>0$ puisque Φ est une solution de l'équation de la chaleur 5 (*cf.* exercice 3.18.).

Soit maintenant $x_0\in\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon>0$. On choisit $\delta>0$ tel que,

$$\forall y\in\mathbb{R}^n,\qquad \|y-x_0\|<\delta\ \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|\leq\varepsilon.$$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $\|x-x_0\|\leq\frac{\delta}{2}$. Nous avons

$$\begin{aligned}|u(x,t)-g(x_0)|| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)[g(y)-g(x_0)]\,dy\right|\\ &\leq \int_{B_\delta(x_0)}\Phi(x-y,t)|g(y)-g(x_0)|\,dy\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)}\Phi(x-y,t)|g(y)-g(x_0)|dy\\ &= I+J.\end{aligned}$$

Maintenant, nous avons

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)dt = \varepsilon$$

d'après l'exercice 3.18. De plus, si $\|x - x_0\| \leq \frac{\delta}{2}$ et $\|y - x_0\| \geq \delta$, alors $\|y-x_0\| \leq \|y-x\| + \frac{\delta}{2} \leq \|y-x\| + \frac{1}{2}\|y-x_0\|$. Et donc, $\|y-x\| \geq \frac{1}{2}\|y-x_0\|$. En conséquence,

$$\begin{aligned}
J \leq & 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)dy \\
= & \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} dy \\
\leq & \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{\|y-x_0\|^2}{16t}} dy \\
\leq & \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Et donc, si $\|x - x_0\| < \frac{\delta}{2}$ et $t > 0$ est assez petit, alors $|u(x,t) - g(x_0)| < 2\varepsilon$. Le théorème en découle.

Remarque 3.2. Remarquons que si g est continue à support compact positive et non identiquement nulle, alors

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} g(y)dy$$

est en fait strictement positive pour tous les points $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$. Nous interprétons cette observation en disant que, pour l'équation de la chaleur, la vitesse de propagation est infinie. Si la température initiale est positive et strictement positive quelque part, alors la température plus tard sera toujours strictement positive, quel que soit l'endroit où on se trouve.

3.2. Solution de l'équation de la chaleur non homogène avec donnée initiale.

Nous nous intéressons au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(0,x) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser le "Principe de Duhamel" qui permet de ramener un problème de Cauchy non homogène à données de

Cauchy nulles à un problème de Cauchy homogène à données de Cauchy non nulles.

Proposition 3.2.1. Principe de Duhamel. *On considère un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *de la forme*

$$P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t})$$

où P *est un polynôme des variables* $x_1, \dots, x_n, t$*. On suppose que le degré de* P *par rapport à la variable* t *est* m *et que le coefficient devant* t^m *dans* P *est* 1*. Si, pour chaque* $\tau \in \mathbb{R}$*,* $v(x, t, \tau)$ *est solution de*

$$\begin{cases} P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t})v(x, t, \tau) = 0 \\ v(x, 0, \tau) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \frac{\partial^{m-2} v}{\partial t^{m-2}}(x, 0, \tau) = 0 \\ \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}(x, 0, \tau) = f(x, \tau) \end{cases}$$

alors, si

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t - \tau, \tau) d\tau,$$

u est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t})u = f(t, x) \\ u(x, 0) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 3.19. *On se propose de montrer la proposition précédente.*

1. *Montrez que, si*

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t - \tau, \tau) d\tau,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^{n-1} v}{\partial \tau^k \partial t^{n-1-k}}(x, 0, t) + \int_0^t \frac{\partial^n v}{\partial t^n}(x, t - \tau, \tau) d\tau.$$

En déduire que

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x,0) = 0 \end{cases}$$

et que pour tout $(n+1)-$*multi-indice* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$ *tel que* $\beta \leq m-1$,

$$\partial_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = \int_0^t \partial_x^\alpha \partial_t^\beta v(x, t-\tau, \tau) d\tau.$$

2. *En déduire le Principe de Duhamel.*

Exercice 3.20. *En utilisant le Principe de Duhamel, donnez une expression explicite d'une solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f(x,t) & \textit{dans } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(0,x) = g(x) & \textit{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

4. Equation des Ondes.

Nous étudions maintenant l'équation des ondes

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0$$

et l'équation des ondes non homogène

$$u_{tt} - \Delta_x u = f$$

assujeties à des conditions au bord et des conditions initiales convenables. Ici, $t > 0$ désigne le temps, $x \in U$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. L'inconnue est $u : \overline{U} \times [0, +\infty[$, $u = u(x,t)$ et le laplacien Δ_x désigne le Laplacien par rapport à la variable d'espace $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dans la seconde équation, $f : U \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est donnée.

Interprétation physique. L'équation des ondes est une modélisation simplifiée d'une corde vibrante ($n = 1$), membrane ($n = 2$) ou d'un solide élastique ($n = 3$). Dans cette représentation physique, $u(x,t)$ représente le déplacement dans une certaine direction du point x à l'instant $t \geq 0$.

Soit V une partie régulière de U. l'accélération dans V est

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_V u\,dx = \int_V u_{tt}\,dx$$

et la force de contact est

$$-\int_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}$$

où $\vec{F}$ est la force agissant sur V à travers ∂V, et la densité de masse est supposée être égale à 1. La loi de Newton nous donne

$$\int_V u_{tt}dx = -\int_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma = -\int_V \text{div }\vec{F}\,dx.$$

Comme cette identité est valable quelle que soit la région V, on a donc

$$u_{tt} = -\text{div }\vec{F}.$$

Pour les corps élastique, $\vec{F}$ est proportionnelle au gradient de u et donc

$$\vec{F} =_a \nabla u.$$

On obtient alors

$$u_{tt} - a\Delta_x u = 0,$$

ce qui pour $a = 1$ nous redonne l'équation des ondes. Cette interprétation physique nous suggère fortement qu'il sera mathématiquement approprié de spécifier *deux* conditions initiales : sur le déplacement u et sa vitesse u_t à l'instant $t = 0$.

4.1. Solution de l'équation des ondes homogène et non homogène dans le cas $n = 1$.

Nous nous intéressons au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,+\infty[\\ u(x,0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 3.21. *En remarquant que*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

et en utilisant l'écriture explicite de la solution des équations de transport, écrire dans le cas où $n = 1$ la solution de l'équation des ondes.

4.2. Solution de l'équation des ondes homogène dans le cas $n \geq 2$.

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

L'outil que nous allons introduire pour résoudre ce problème est donné par la définition suivante.

Définition 4.2.1. Soit ϕ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Nous définissons la "moyenne sphérique $M_\phi(x,r)$" comme étant la valeur moyenne de ϕ sur $S_r(x)$:

$$M_\phi(x,r) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} \phi(z) d\sigma(z).$$

Exercice 3.22. *Montrez que*

$$M_\phi(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}_n} \phi(x + ry) d\sigma_n(y).$$

Montrez que, si on regarde M_ϕ comme une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, c'est une fonction paire de r, de classe C^k par rapport à x et r si ϕ est de classe C^k. De plus, $M_\phi(\cdot, 0) = \phi$.

Proposition 4.2.2. *Si ϕ est une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\Delta_x M_\phi(x,r) = \frac{\partial^2 M_\phi}{\partial r^2}(x,r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial M_\phi}{\partial r}(x,r).$$

Preuve. Voir l'exercice suivant.

Exercice 3.23.

1. *Montrez qu'il suffit de considérer le cas où $r > 0$.*
2. *Montrez, en utilisant l'identité de Green-Riemann que*

$$\partial_r M_\phi(x,r) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\|z\| \leq r} \Delta\phi(x+z) dz.$$

En déduire que

$$r^{n-1}\partial_r M_\phi(x,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^r \int_{\mathbb{S}_n} \Delta\phi(x+\rho y)\rho^{n-1} d\sigma_n(y)\, d\rho,$$

et donc

$$\partial_r\left(r^{n-1}\partial_r M_\phi(x,r)\right) = r^{n-1}\Delta_x M_\phi(x,r).$$

3. *Conclure.*

Corollaire 4.2.3. *Supposons que $u(x,t)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et soit $M_u(x,r,t)$ la moyenne sphérique de $x \mapsto u(x,t)$. Alors u est une solution de l'équation des ondes si et seulement si M_u vérifie*

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) M_u(x,r,t) = \partial_t^2 M_u(x,r,t). \tag{6}$$

Exercice 3.24. *Montrez le corollaire 4.2.3.*

Quand n est impair, l'équation aux dérivées partielles peut-être ramenée à l'équation des ondes en dimension 1 grâce au lemme suivant :

Lemme 4.2.4. *Si $k \geq 1$ et $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, alors*

$$\partial_r^2 (r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\phi(r)] = (r^{-1}\partial_r)^k[r^{2k}\phi'(r)]. \tag{7}$$

Exercice 3.25. *Preuve du lemme 4.2.4*

1. *Montrez que le lemme 4.2.4 est vrai si $\phi(r) = r^m$.*
2. *Montrez que le lemme 4.2.4. est vrai si toutes les dérivées de $\phi(r)$ d'ordres inférieurs ou égaux à $k+1$ s'annulent en r_0.*
3. *En déduire le lemme.*

Le membre de droite de (7) vaut

$$(r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\phi''(r) + 2kr^{2k-2}\phi'(r)],$$

et donc, si on définit l'opérateur T_k par

$$T_k\phi(r) = (r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\phi(r)],$$

alors (7) nous dit que

$$\partial_r^2 T_k\phi = T_k[(\partial_r^2 + 2kr^{-1}\partial_r)\phi].$$

En particulier, si $n = 2k+1$ et si on applique T_k aux deux membres de (6) alors (6) devient

$$\partial_r^2 T_k M_u(x,r,t) = \partial_t^2 T_k M_u(x,r,t), \tag{8}$$

ce qui n'est autre que l'équation des ondes en dimension 1.

Faisons tout d'abord quelques observations sur l'opérateur T_k.

Exercice 3.26. *Montrez par récurrence sur k que*

$$T_k(\phi)(r) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j^k r^{j+1} \phi^{(j)}(r).$$

En déduire que $c_0^k = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$.

Nous pouvons maintenant déduire une solution de l'équation des ondes quand n est impair. D'après le corollaire 4.2.3, M_u vérifie l'équation aux dérivées partielles (6) avec les données initiales

$$M_u(x,r,0) = M_f(x,r), \qquad \partial_t M_u(x,r,0) = M_g(x,r).$$

et donc, si nous posons

$$\widetilde{u} = TM_u, \quad \widetilde{f} = TM_f, \quad \widetilde{g} = TM_g,$$

où

$$T(\cdot) = T_{(n-1)/2}(\cdot) = (r^{-1}\partial_r)^{(n-3)/2}[r^{n-2}(\cdot)],$$

on a donc

$$\begin{aligned}
&\partial_r^2 \widetilde{u}(x,r,t) = \partial_t^2 \widetilde{u}(x,r,t),\\
&\widetilde{u}(x,r,0) = \widetilde{f}(x,r), \qquad \partial_t \widetilde{u}(x,r,0) = \widetilde{g}(x,r).
\end{aligned}$$

La solution de ce problème est donné par l'exercice 2.20 :

$$\widetilde{u}(x,r,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{f}(x,r+t) + \widetilde{f}(x,r-t)] + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \widetilde{g}(x,s)ds,$$

et donc il reste à reconstruire les valeurs de u connaissant celles de $\widetilde{u}$. Pour cela, nous utilisons le résultat de l'exercice 3.26 :

$$u(x,t) = M_u(x,0,t) = \lim_{r\to 0} \frac{\widetilde{u}(x,r,t)}{c_0 r}$$

où $c_0 = 1 \cdot 3 \cdots (n-2)$.

Exercice 3.27. *Montrez que M_f et M_g sont des fonctions paires de r. En déduire que $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont des fonctions impaires de r et que $\partial_r\widetilde{f}$ est une fonction paire de r. En déduire que*

$$u(x,t) = \frac{1}{c_0}\left[(\partial_r\widetilde{f})(x,r)|_{r=t} + \widetilde{g}(x,t)\right].$$

En déduire le théorème suivant.

Théorème 4.2.5. *Supposons $n \geq 3$ et impair. Si $f \in C^{(n+3)/2}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C^{(n+1)/2}(\mathbb{R}^n)$, la fonction*

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{1\cdot 3\cdots(n-2)\omega_n}\Bigg[&\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{(n-3)/2}\left(t^{n-2}\int_{\|y\|=1} f(x+ty)d\sigma_n(y)\right) \\ &+(t^{-1}\partial_t)^{(n-3)/2}\left(t^{n-2}\int_{\|y\|=1} g(x+ty)d\sigma_n(y)\right)\Bigg] \end{aligned}$$

est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n\times]0,+\infty[\\ u(x,0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Enfin, en ce qui concerne l'équation des ondes en dimension paire dans $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, on remarque u est une solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}$ si on suppose que u, f et g sont indépendantes de x_{n+1}.

Exercice 3.28. *Utiliser la remarque précédente et le théorème 4.2.5. pour montrer le théorème suivant.*

Théorème 4.2.6. *Supposons $n \geq 2$ pair. Si $f \in C^{(n+4)/2}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C^{(n+2)/2}(\mathbb{R}^n)$, la fonction*

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{2}{1\cdot 3\cdots(n-1)\omega_{n+1}}\Bigg[&\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}\left(t^{n-1}\int_{\|y\|\leq 1} \frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-\|y\|^2}}dy\right) \\ &+(t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}\left(t^{n-1}\int_{\|y\|\leq 1} \frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-\|y\|^2}}dy\right)\Bigg] \end{aligned}$$

est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n\times]0,+\infty[\\ u(x,0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

4.3. Solution de l'équation des ondes non homogène dans le cas $n \geq 2$.

Exercice 3.29. *Utiliser les théorèmes précédents et le principe de Duhamel pour obtenir la formule de représentation d'une solution du problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = f(x,t) & \textit{dans } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(x,0) = g(x) & \textit{pour } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0,x) = h(x) & \textit{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$