Chapitre 5
Espaces métriques connexes

1. Définitions

1.1. Définitions

D'un point de vue étymologique, être connexe c'est être constitué "en un seul morceau". Nous allons en fait nous intéresser à cette notion et la traduire en termes topologiques. L'une des utilités de cette notion est, entre autres, de permettre de passer du local au global.

$\star$ **1.1.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est un *espace connexe* si et seulement si les parties de E à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide $\emptyset$ et E.

$\star$ **1.1.2. Proposition.** *Soit (E, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
i. E est connexe
ii. Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints
iii. Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints.

Preuve. Exercice 5.1. $\square$

1.2. Parties connexes

$\star$ **1.2.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Comme d'habitude, on munit A de la distance induite. On dit que A est une *partie connexe* si et seulement si l'espace métrique A muni de la métrique induite est connexe.

1.2.2. Proposition. *La partie A de E est connexe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :*
i. Si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, alors

$$(A \cap O_1 = \emptyset \quad et \quad A \subset O_2) \quad ou \quad (A \cap O_2 = \emptyset \quad et \quad A \subset O_1).$$

ii. Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont deux fermés de E vérifiant $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors

$$(A \cap F_1 = \emptyset \quad \text{et} \quad A \subset F_2) \quad \text{ou} \quad (A \cap F_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad A \subset F_1).$$

Preuve. Exercice 5.2. □

2. Propriétés.

2.1. Image continue d'un connexe.

⋆ **2.1.1. Théorème.** *Soit $f : (E, d) \to (E', d')$ une application continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

Preuve. Exercice 5.4. □

2.2. Caractérisation des connexes.

⋆ **2.2.1. Théorème.** *Un espace métrique (E, d) est connexe si et seulement si toute application f de (E, d) dans $(\{0, 1\}, \delta)$ où δ est la distance discrète est constante.*

Preuve. Exercice 5.5. □

⋆ **2.2.2. Proposition.** *Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E, d). Si B est une partie de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Preuve. Exercice 5.6. □

2.2.3. Proposition. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E, d) telle que*

$$\exists i_0 \in I, \qquad \forall i \in I, \qquad C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset.$$

Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Preuve. Exercice 5.8. □

2.2.4. Corollaire. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes telle que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.*

Preuve. Exercice 5.9. □

2.2.5. Proposition. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes (avec $I = \{0, 1, \ldots, p\}$ ou $I = \mathbb{N}$) telle que, pour tout $i \in I$, $i \neq 0$, $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.*

Preuve. Exercice 5.10. □

2.2.6. Proposition. *Soient $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. L'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est connexe si et seulement E_i est connexe pour tout i.*

Preuve. Exercice 5.11. □

2.3. Composantes connexes.

⋆ **2.3.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique. On considère sur E la relation

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C \text{ et } y \in C).$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (Exercice 5.12.). Si $x \in E$, sa classe d'équivalence $[x]$ est connexe (Exercice 5.12.). L'ensemble $[x]$ est appelé *composante connexe* de E.

2.3.2. Propriétés.
- *Les composantes connexes sont fermées.*
- *Si elles sont en nombre fini, elles sont ouvertes.*
- *E est connexe si et seulement si E n'a qu'une seule composante connexe.*
- *Les composantes connexes forment une partition de E.*

Preuve. Exercice 5.13. □

2.4. Connexes de $\mathbb{R}$.

⋆ **2.4.1. Théorème.** *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Un connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. En effet, si $C \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, il existe $(a, b) \in C^2$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $x \notin C$. Mais alors $C \subset]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$ donc C n'est pas connexe.

Réciproquement, montrons qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe. Si I est un singleton, c'est immédiat. Si I est un intervalle alors $I^\circ \subset I \subset \overline{I^\circ}$. Pour conclure que I est connexe, il suffit de montrer que I° est connexe, et donc que tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ est connexe. Pour cela, on considère une application continue $f :]a, b[\to \{0, 1\}$. Si f n'est pas constante, il existe $x, y \in I$ vérifiant $a < x < y < b$ tels que $f(x) \neq f(y)$, par exemple $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Considérons l'ensemble

$$A = \{z \in I,\ z \geq x \text{ et } \forall t \in [x, z],\ f(t) = 0\}.$$

L'ensemble A est non vide car $x \in A$. De plus, A est majoré car pour tout $z \in A$, on a $z \leq y$. Soit $c = \sup A$. Comme f est continue, on a $f(c) = 0$. En effet, $c - \frac{1}{n}$ n'est plus majorant de A et donc il existe z_n dans A avec $c - \frac{1}{n} \leq z_n \leq c$, et donc $f(c) = \lim f(z_n) = 0$.

De même, f étant continue en c,

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall t \in [c, c+\varepsilon], \qquad \delta(f(t), f(c)) < \frac{1}{2},$$

donc pour tout $t \in [c, c+\varepsilon]$, $f(t) = 0$, ce qui montre $c + \varepsilon \in A$. Ceci contredit le fait que $c = \sup A$. Finalement, l'application f est constante et I est connexe d'après le théorème 2.2.1. □

⋆ **2.4.2. Théorème des valeurs intermédiaires.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle. En particulier, si $a < b$ sont dans I, et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Preuve. Exercice 5.14. □

2.4.3. Corollaire. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une application continue alors $f([a, b])$ est un intervalle $[c, d]$.*

Preuve. Exercice 5.15. □

3. Connexité par arcs.

⋆ **3.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique. On appelle *chemin* toute application $\gamma : [0, 1] \to (E, d)$ continue. L'image $\gamma([0, 1])$ du chemin s'appelle un *arc*, $\gamma(0)$ *l'origine* de l'arc, $\gamma(1)$ son *extrémité*.

⋆ **3.2. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E est *connexe par arcs* si pour tout $(a, b) \in E^2$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.

⋆ **3.3. Théorème.** *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Preuve. Exercice 5.16. □

⋆ **3.4. Remarque.** *La connexité par arcs est surtout une notion pratique pour montrer qu'un espace est connexe. En termes intuitifs, un espace est connexe par arcs si et seulement si on peut toujours relier deux de ses points par une courbe continue ce qui en fait une notion moins abstraite que la connexité.*

La réciproque du théorème 3.3. est malheureusement fausse : nous le verrons en exercice 5.19. Néanmoins, le théorème suivant donne un cas où la réciproque est vraie.

⋆ **3.5. Théorème.** *Une partie ouverte d'un espace vectoriel normé est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.*

Preuve. Exercice 5.17. □

Exercices.

Exercices d'apprentissage.

Exercice 5.1. Montrez la proposition 1.1.2.

Exercice 5.2. Montrez la proposition 1.2.2.

Exercice 5.3. Montrez que $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe en utilisant par exemple la proposition 1.2.2.

Exercice 5.4. Montrez le théorème 2.1.1.

Exercice 5.5. Montrez le théorème 2.2.1.

Exercice 5.6. Montrez la proposition 2.2.2.

Exercice 5.7. Montrez qu'en général, une réunion de connexe n'est pas connexe.

Exercice 5.8. Montrez la proposition 2.2.3.

Exercice 5.9. Montrez le corollaire 2.2.4.

Exercice 5.10. Montrez la proposition 2.2.5.

Exercice 5.11. Montrez la proposition 2.2.6.

Exercice 5.12. Montrez les points énoncés dans la définition 2.3.1.

Exercice 5.13. Montrez les propriétés 2.3.2.

Exercice 5.14. Montrez le théorème 2.4.2.

Exercice 5.15. Montrez le corollaire 2.4.3.

Exercice 5.16. Montrez le théorème 3.3.

Exercice 5.17. Montrez le théorème 3.5. On considèrera U une partie ouverte connexe de E et on montrera que U est connexe par arcs de la manière suivante : on fixe $x_0 \in U$ et on considère $A = \{x \in U,$ il existe un arc joignant x_0 et $x\}$. Montrez que A est ouvert et fermé dans U.

Exercices d'approfondissement.

Exercice 5.18. Montrer que $GL_2(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Exercice 5.19. Soit $A = \{(x, \sin\frac{1}{x})\ x > 0\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$. Montrez que A est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Exercice 5.20. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On considère une fonction réelle définie sur Ω, continue, vérifiant la propriété de moyenne suivante:

Pour tout $r > 0$ tel que le disque fermé $B'_r(x) \subset \Omega$, on a:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + re^{i\theta})d\theta.$$

Montrer que si f est bornée et atteint son maximum en un point de Ω, alors

$$A = \{x \in \Omega : \ f(x) = \sup_{u \in \Omega} f(u)\}$$

est un ensemble ouvert et fermé. En déduire que f est constante dans Ω.

Exercice 5.21. Soient $(C[0,1], \|.\|_\infty)$, I l'ensemble des applications injectives de $C[0,1]$, I^+ l'ensemble des applications de $C[0,1]$ strictement croissantes et I^- l'ensemble des applications de $C[0,1]$ strictement décroissantes. Montrer que I admet deux composantes connexes qui sont I^+ et I^-.

Exercice 5.22. Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques.

1. On suppose que E et F sont homéomorphes et que E admet n composantes connexes. Montrer que F admet n composantes connexes.

2. Montrer que $[0,1], [0,1[$ et $]0,1[$ sont deux à deux non homéomorphes.

3. Montrer que le segment, le cercle et la croix sont deux à deux non homéomorphes.

Exercice 5.23 Soit $GL_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 inversible. Soit $A \in GL_2(\mathbb{C})$, on désigne par α_1 et α_2 les valeurs propres de A

1. Montrer qu'il existe une application continue $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \text{ et } \phi(1) = 1, \\ \phi(t) \neq 0 \text{ pour tout } t \in]0,1[, \\ \phi(t)\alpha_i + (1-\phi(t)) \neq 0 \text{ pour } i = 1,2. \end{cases}$$

2. Montrer que $\det(\phi(t)A + (1-\phi(t))I) \neq 0$, où I est la matrice identité.

3. Montrer que $GL_2(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Exercice 5.24. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Corrigé des exercices d'apprentissage.

Exercice 5.1. *Montrons que i. implique ii.* Supposons que $E = U_1 \cup U_2$ où U_1 et U_2 sont deux ouverts disjoints non vides. En particulier $E \setminus U_1 = U_2$ est ouvert ce qui montre que U_1 est fermé. U_1 est donc une partie ouverte et fermée non vide et différente de E, ce qui implique que E n'est pas connexe.

Montrons que ii. implique iii. En effet si $E = F_1 \cup F_2$ est la réunion de deux fermés non vides disjoints, alors F_2 est ouvert car son complémentaire est fermé, ainsi que F_1. On en déduit que E est réunion de deux ouverts non vides disjoints, ce qui est absurde.

Montrons que iii. implique i. Si E n'est pas connexe, alors il existe une partie F à la fois ouverte et fermée, différente de E et non vide. En particulier, $E = F \cap (E \setminus F)$ est donc la réunion disjointe de deux fermés non vides, ce qui contredit *iii.*

Exercice 5.2. Nous ne montrerons que la propriété *i.* car la seconde est tout à fait analogue. Tout d'abord, si A n'est pas connexe alors, il existe deux ouverts U_1 et U_2 de A disjoints et non vides tels que $A = U_1 \cup U_2$. Les propriétés de la topologie induite nous donne l'existence de deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que $U_1 = A \cap O_1$ et $U_2 = A \cap O_2$. On a alors $A = U_1 \cup U_2 \subset O_1 \cup O_2$ et $A \cap O_1 \cap O_2 = (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = U_1 \cap U_2 = \emptyset$, et cependant $A \cap O_1 = U_1 \neq \emptyset$ et $A \cap O_2 = U_2 \neq \emptyset$.

Réciproquement, si A est connexe et si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, alors $A \cap O_1$ et $A \cap O_2$ sont deux ouverts disjoints de A recouvrant A. Comme A est connexe, on a soit $A \cap O_1 = \emptyset$ et $A \subset A \cap O_2$, soit $A \cap O_2 = \emptyset$ et $A \subset A \cap O_1$.

Exercice 5.3. Soit $a \notin \mathbb{Q}$. Posons $O_1 =]-\infty, a[$ et $O_2 =]a, +\infty[$. O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}$, qui recouvrent $\mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Comme $\mathbb{Q} \cap O_1 \neq \emptyset \neq \mathbb{Q} \cap O_2$, on en déduit que $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

Exercice 5.4. Soit A une partie ouverte et fermée de $f(E)$. Comme f est continue, $f^{-1}(A)$ est ouverte et fermée dans E. Comme E est connexe, on a $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(A) = E$. Si $f^{-1}(A) = \emptyset$, alors il n'existe pas de $x \in E$ tel que $f(x) \in A$, ce qui implique que $A \cap f(E) = A = \emptyset$. Si $f^{-1}(A) = E$, alors pour tout $x \in E$, $f(x) \in A$, ce qui implique que $A = f(E)$. On a donc bien prouvé que $f(E)$ est connexe.

Exercice 5.5. Tout d'abord, si E est connexe, et si $f : E \to \{0,1\}$ est continue, alors $f(E)$ est connexe et donc f est constante. En effet, si f n'est pas constante, on a $f(E) = \{0,1\}$ qui est une réunion disjointe de deux fermés et donc $f(E)$ n'est pas connexe. Réciproquement, si E n'est pas connexe, et si $E = F_1 \cup F_2$ est la réunion disjointe de deux fermés non vides, si on pose $f_{|F_1} = 0$ et $f_{|F_2} = 1$, alors f est non constante. Cependant f est continue : il suffit pour cela de vérifier que l'image réciproque par f de tout fermé de $\{0,1\}$ est fermé dans E. Pour cela, soit F un fermé de $\{0,1\}$. Si $F = \{0,1\}$ alors $f^{-1}(F) = E$ est fermé. Si $F = \{0\}$, alors $f^{-1}(F) = F_0$ est fermé. Si $F = \{1\}$, alors $f^{-1}(F) = F_1$ est fermé. Si $F = \emptyset$, alors $f^{-1}(F) = \emptyset$ est fermé. Dans tous les cas, on a bien montré que l'image réciproque par f^{-1} d'un fermé est un fermé, et donc que f ainsi construite est continue.

Exercice 5.6. Soit $f : B \to \{0,1\}$ une application continue. Il suffit de montrer que f est constante pour obtenir la connexité de B. Or A est connexe. On en déduit que $f_{|A}$ est constante. Supposons par exemple que $f_{|A} \equiv 1$. Comme f est continue et que $B \subset \overline{A}$, si $x \in B$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x, et donc $f(x) = \lim f(x_n) = \lim 1 = 1$. On a donc bien prouvé que $f_{|B} \equiv 1$, et donc que f est constante sur B.

Exercice 5.7. $\{0\}$ et $\{1\}$ sont deux connexes. Leur réunion $\{0,1\}$ n'est pas connexe.

Exercice 5.8. Soit $f : \bigcup_{i \in I} C_i \to \{0,1\}$ une application continue. Nous allons montrer qu'en fait, f est constante. Tout d'abord, C_{i_0} est connexe, donc $f_{|C_{i_0}}$ est constante. Soit λ la valeur de f dans C_{i_0}. Soit $i \in I$. Par hypothèse, f est constante sur C_i car C_i est connexe. Comme $C_i \cap C_{i_0}$ est non vide, on en déduit que f vaut λ sur C_i. Ceci étant vrai quel que soit $i \in I$, on en déduit que $f \equiv \lambda$ sur $\bigcup_{i \in I} C_i$, et donc que f est constante sur $\bigcup_{i \in I} C_i$. $\bigcup_{i \in I} C_i$ est donc connexe.

Exercice 5.9. Si $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$, on rajoute $\{x\}$ à la famille $(C_i)_{i \in I}$. En particulier, $\forall i \in I$, $\{x\} \cap C_i \neq \emptyset$, et donc d'après la proposition précédente, $\{x\} \cup \bigcup_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Exercice 5.10. On prend comme auparavant une fonction $f : \bigcup_{i \in I} C_i \to \{0,1\}$, continue. C_0 est connexe donc $f_{|C_0}$ est constante. Comme $C_0 \cap C_1$ est non vide et que $f_{|C_1}$ est constante car C_1 est connexe, on en déduit que $f_{|C_0 \cup C_1}$ est constante. Supposons $f_{|C_0 \cup \cdots \cup C_p}$ constante. Comme C_{p+1} est connexe, $f_{|C_{p+1}}$ est constante. Comme $C_p \cap C_{p+1}$ est non vide, on en déduit que $f_{|C_0 \cup \cdots \cup C_{p+1}}$ est constante. On a donc prouvé par récurrence que $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Exercice 5.11. Tout d'abord, si $E_1 \times \cdots \times E_n$ est connexe, comme $E_i = \pi_i(E_1 \times \cdots \times E_n)$ où π_i est la projection canonique et que π_i est continue, on en déduit que E_i est connexe.

Réciproquement, si tous les E_i sont connexes, montrons que $E_1 \times \cdots \times E_n$ est connexe. Par récurrence sur n, il suffit de montrer le résultat pour $n = 2$. Soit donc $f : E_1 \times E_2 \to \{0,1\}$ continue. Nous allons montrer que f est constante, c'est-à-dire que quels que soient (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans $E_1 \times E_2$, on a $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$. Comme E_2 est connexe, l'application $E_2 \ni x \mapsto f(x_1, x)$ est constante, donc $f(x_1, x_2) = f(x_1, y_2)$. Comme E_1 est connexe, l'application $E_1 \ni x \mapsto f(x, y_2)$ est constante, donc $f(x_1, y_2) = f(y_1, y_2)$. On a bien prouvé que $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$, et donc que $E_1 \times E_2$ est connexe.

Exercice 5.12. *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.* En effet, $x \mathcal{R} x$ car $\{x\}$ est un connexe contenant x. Elle est clairement symétrique. Enfin, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors il existe un connexe C_1 contenant x et y et il existe un connexe C_2 contenant y et z. Comme $y \in C_1 \cap C_2$, on en déduit que $C_1 \cup C_2$ est un connexe qui contient x et z et donc $x \mathcal{R} z$.

$[x]$ est connexe. En effet, $[x]$ est la réunion de tous les connexes contenant x, donc leur intersection est non vide. On en déduit que la réunion de tous ces connexes est connexe.

Exercice 5.13. *Les composantes connexes sont fermées.* En effet, si $[x]$ est une composante connexe, alors $\overline{[x]}$ est un connexe contenant $[x]$. En particulier, tout élément de $\overline{[x]}$ est en relation avec x, donc $\overline{[x]} \subset [x]$, ce qui implique que $[x]$ est fermée.

Si les composantes connexes sont en nombre fini, elles sont ouvertes. En effet, le complémentaire d'une composante connexe C est la réunion des autres composantes connexes. Comme toutes ces autres composantes connexes sont fermées, qu'elles sont en nombre fini et qu'une réunion finie de fermés est fermé, on en déduit que le complémentaire de C est fermé, et donc que C est ouverte.

E est connexe si et seulement si E n'a qu'une seule composante connexe. Si E est connexe, alors pour tout $x \in E$, $[x] = E$, donc E n'a qu'une composante connexe.

Réciproquement, si E n'a qu'une composante connexe $[x]$, alors tout élément y de E est en relation avec x. En d'autres termes, pour tout $y \in E$, il existe un connexe C_y contenant x et y. Comme $x \in \bigcap_{y\in E} C_y$, on en déduit que $\bigcap_{y\in E} C_y$ est connexe. Et comme $E = \bigcup_{y\in E} C_y$, on en déduit que E est connexe.

Les composantes connexes forment une partition de E. Cela découle du fait que les classes d'équivalences forment une partition.

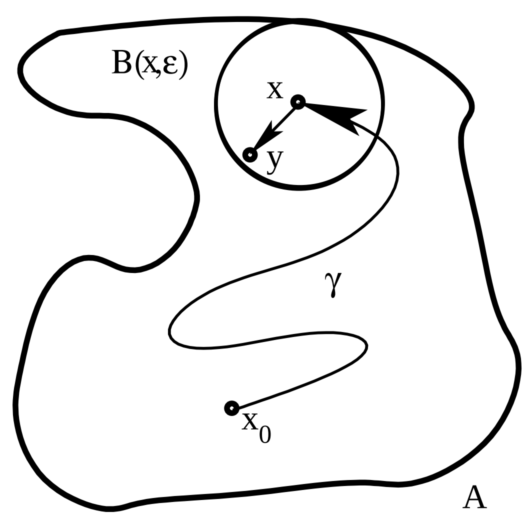
Exercice 5.14. Si I est un intervalle, I est un connexe de $\mathbb{R}$. Si f est continue de I dans $\mathbb{R}$, $f(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. En particulier, si $a < b$ sont dans I et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors $f([a,b])$ est un intervalle qui contient les deux nombres $f(a)$ et $f(b)$ de signe différents, ce qui implique que $f([a,b])$ contient 0.

Exercice 5.15. $f([a,b])$ est un intervalle compact car l'image d'un compact par une fonction continue est compact. Donc $f([a,b])$ est de la forme $[c,d]$.

Exercice 5.16. Soit $f : E \to \{0,1\}$ continue. On se propose de montrer que f est constante. Soit $x_0 \in E$. Montrons que, pour tout $x \in E$, $f(x) = f(x_0)$. Soit donc $x \in E$. Comme E est connexe par arcs, on en déduit qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to E$ continu tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$. L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue, donc constante car $[0,1]$ est connexe. Et donc $f(\gamma(1)) = f(x) = f(\gamma(0)) = f(x_0)$.

Exercice 5.17. Soit U une partie ouverte connexe de E. Soit $x_0 \in U$. Soit $A = \{x \in U,$ il existe un arc joignant x_0 et $x\}$.

A est ouvert dans U. En effet, si $x \in A$, x est dans U. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Si $y \in B(x,\varepsilon)$, alors on peut rejoindre x_0 à y. En effet, (*cf.* dessin ci-contre), le segment $[x,y]$ est dans U et il existe $\gamma : [0,1] \to E$ continue telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$. L'application δ définie par



$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ (2-2t)x + (2t-1)y & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est continue, relie $\delta(0) = x_0$ à $\delta(\frac{1}{2}) = x$ le long de γ, puis à $\delta(1) = y$ le long du segment $[x, y]$ qui est inclus dans U car inclus dans la boule $B(x, \varepsilon)$. On en déduit que tout élément $y \in B(x, \varepsilon)$ est dans A, et donc que A est ouvert.

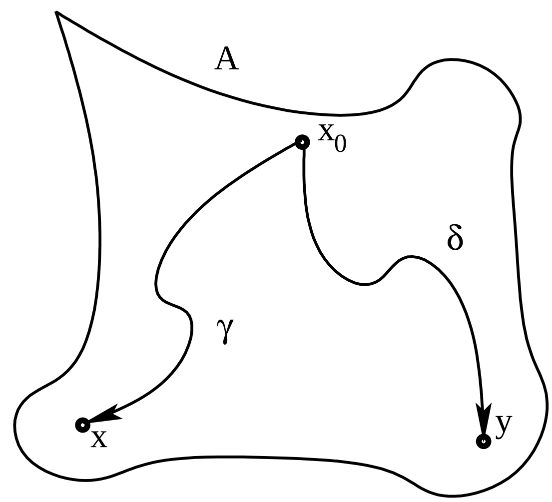
Il reste à vérifier que A est fermé dans U. Soit $y \in \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon)$ soit incluse dans U. La boule $B(y, \varepsilon)$ intersecte A en un point x. Le même raisonnement que précédemment nous montre qu'on peut relier y à x_0, et donc que $y \in A$.

A est donc ouvert et fermé et ouvert dans U connexe. A est non vide car $x_0 \in A$. Et donc $A = U$. En particulier, tout point x de A peut être relié à x_0. Il reste à vérifier qu'on peut relier deux points x et y quelconques de A.

Soient donc $x, y \in U$. D'après ce qui précède, il existe $\gamma : [0,1] \to U$ continue telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$. Il existe $\delta : [0,1] \to U$ continue telle que $\delta(0) = x_0$ et $\delta(1) = y$. L'application

$$(\gamma^- \cdot \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(1-2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est un arc qui relie x à y après être passé par x_0 (vérification immédiate).



Indications pour les exercices d'approfondissement.

Exercice 5.19. A est connexe car $B \subset A \subset \overline{B}$ où $B = \{(x, \sin\frac{1}{x})\ x > 0\}$ est connexe. A n'est pas connexe par arcs. Si c'était le cas, on pourrait relier $(0,1)$ à $(\pi, 0)$ par un arc continu $[0,1] \ni t \mapsto (x(t), y(t))$. Si $t_0 = \sup\{t \in [0,1], x(t) = 0\}$ alors pour tout $t > t_0$, $y([t_0, t]) = [-1, 1]$ ce qui contredit la continuité de l'arc $[0,1] \ni t \mapsto (x(t), y(t))$.

Exercice 5.21. Si $x < y \in [0,1]$, l'application qui à une fonction $f \in I$ associe le signe du nombre

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

est bien définie, continue et ne dépend pas du choix de x et y.

Exercice 5.22. Si $f : E \to F$ est continue, alors le nombre de composantes connexe de $f(E)$ est inférieur au nombre de composantes connexes de E. (montrez que f induit une application $f_\sharp$ de l'ensemble des composantes connexes de E dans l'ensemble des composantes connexes de $f(E)$).

Exercice 5.24. Montrez que $f(\mathbb{R})$ est au plus dénombrable, et donc que f est constante.