Corrigé du devoir 1

Exercice 1.

1. Si f est injective alors il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = Id_X$. En particulier, si $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A = g \circ f(A) = \widehat{g} \circ \widehat{f}(A)$, donc $\widehat{g} \circ \widehat{f} = Id_{\mathcal{P}(X)}$, ce qui implique que $\widehat{f}$ est injective.

Réciproquement, supposons f non injective, et montrons que $\widehat{f}$ ne l'est pas non plus . Soit donc $x \neq y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$. On a $\widehat{f}(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = \widehat{f}(\{y\})$, et cependant $\{x\} \neq \{y\}$, ce qui implique que $\widehat{f}$ n'est pas surjective.

On a bien prouvé que f est injective si et seulement si $\widehat{f}$ est injective.

2. Si f est surjective, alors il existe $g : Y \to X$ telle que $f \circ g = Id_Y$. En particulier, si $B \in \mathcal{P}(Y)$, on a $B = (f \circ g)^{-1}(B) = g^{-1}(f^{-1}(B)) = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}(B)$, donc $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = Id_{\mathcal{P}(Y)}$, ce qui montre que $\widetilde{f}$ est injective.

Réciproquement, si $\widetilde{f}$ est injective, comme $f^{-1}(Y) = \widetilde{f}(Y) = f^{-1}(f(X)) = \widetilde{f}(f(X))$, on en déduit que $Y = f(X)$, ce qui prouve que f est surjective.

On a bien prouvé que f est surjective si et seulement si $\widetilde{f}$ est injective.

Exercice 2.

1. On a $A \subset \overline{A}$, donc diam $A \leq$ diam $\overline{A}$.

Réciproquement, si $x, y \in \overline{A}$ et si $\varepsilon > 0$, alors il existe $x', y' \in A$ tels que $d(x, x') < \varepsilon$ et $d(y, y') < \varepsilon$. On a alors $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < d(x', y') + 2\varepsilon$, donc

$$d(x, y) \leq \sup_{x', y' \in A} d(x', y') + 2\varepsilon = \text{diam } A + 2\varepsilon,$$

soit encore

$$\text{diam } \overline{A} = \sup_{x, y} d(x, y) \leq \text{diam } A + 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on a diam $\overline{A} \leq$ diam A.

On a bien prouvé que diam $A \leq$ diam $\overline{A}$.

2. Soient $x, y \in A \cup B$. On a quatre cas : soit $x, y \in A$, soit $x, y \in B$, soit $x \in A$ et $y \in B$, ou soit $x \in B$, $y \in A$. Dans le premier cas, on a $d(x, y) \leq$diam A, et dans le second on a $d(x, y) \leq$diam B. Dans le troisième cas, si $x \in A$ et $y \in B$, alors

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \qquad d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \text{diam } A + d(a, b) + \text{diam } B.$$

En particulier,

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \qquad d(x, y) - \text{diam } A - \text{diam } B \leq d(a, b),$$

et donc

$$d(x, y) - \text{diam } A - \text{diam } B \leq \inf_{(a,b) \in A \times B} d(a, b) = d(A, B),$$

soit encore

$$d(x, y) \leq \text{diam } A + \text{diam } B + d(A, B).$$

Le dernier cas ($x \in B$ et $y \in A$) est analogue. Ceci étant vrai quels que soient $x, y \in A \cup B$, on en déduit que

diam $(A \cup B) \leq$ diam $A+$ diam $B + d(A, B)$.

Exercice 3.

1. Tout d'abord, $\mathbb{R}$ est équipotent à $]-1,1[$: il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ qui est bien une bijection. Si maintenant A est un ensemble d'intérieur non vide, alors il existe $x \in A$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$. L'application $g :]-1,1[\ni y \mapsto x+\varepsilon y$ est une bijection de $]-1,1[$ dans $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ qui est donc non dénombrable. A contient donc un ensemble non dénombrable, donc

Un ensemble d'intérieur non vide est non dénombrable.

2. Si $\mathbb{R}\setminus D$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} \neq \overline{\mathbb{R}\setminus D} = \mathbb{R}\setminus D^\circ$, ce qui implique que $D^\circ \neq \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$. D est donc d'intérieur non vide donc non dénombrable ce qui est absurde.

On a bien prouvé que si D est un ensemble dénombrable, alors $\mathbb{R}\setminus D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

i. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est point d'accumulation de $\mathbb{Q}$. Montrons que les rationnels sont aussi points d'accumulation de $\mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$. Il faut donc montrer qu'il existe $y \neq x$ tel que $d(x,y) < \varepsilon$. Comme $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tel que $d(x,z) < \varepsilon/2$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{Q}$ tel que $d(y,z) < \varepsilon/4$, ce qui implique que $d(x,y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < \varepsilon$ et $d(x,y) > \varepsilon/2 - \varepsilon/4 = \varepsilon/4$, et donc que $x \neq y$. L'ensemble $\mathcal{A}$ des points d'accumulation est donc $\mathbb{R}$.
En particulier, comme $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble $\mathcal{A}$ des points d'accumulation et de l'ensemble $\mathcal{I}$ des points isolés, on en déduit que $\mathcal{I} = \emptyset$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ des points d'accumulation de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$
et l'ensemble $\mathcal{I}$ des points isolés de $\mathbb{Q}$ est $\emptyset$.

ii. De manière totalement analogue, on a

L'ensemble $\mathcal{A}$ des points d'accumulation de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$
et l'ensemble $\mathcal{I}$ des points isolés de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est $\emptyset$.

iii. Tout d'abord, $0 \in \overline{C}$ car $\lim 1/n = 0$. De plus, $C' = C \cup \{0\}$ est la réunion d'une suite et de sa limite donc C' est compact, ce qui implique que C' est fermé. Comme $\overline{C}$ doit contenir 0, on en déduit que $\overline{C} = C' = C\cup\{0\}$. En particulier, $\mathcal{A}\cup\mathcal{I} = C'$. Les points de C sont isolés : en effet $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ est un voisinage de $\frac{1}{n}$ qui ne contient aucun point de C. Le point 0 est point d'accumulation car $\lim 1/n = 0$, et donc

L'ensemble $\mathcal{A}$ des points d'accumulation de C est $\{0\}$
et l'ensemble $\mathcal{I}$ des points isolés de C est C.

iv. Les éléments de $\overline{C}$ sont points d'accumulation de D. Montrons que ce sont les seuls. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}]$, l'intervalle $[\frac{1}{p+1}+\alpha, \frac{1}{p}]$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de D.
En effet, si on a prouvé cela, et si $x \notin \overline{C}$, alors si $x < 0$, x n'est pas point d'accumulation de D car $]-\infty, 0[$ est un voisinage de x ne coupant pas D ; si $x > 1$, alors $]\frac{1+x}{2}, +\infty[$ est un voisinage de x ne contenant qu'un nombre fini d'éléments de D donc x n'est pas point d'accumulation de D, et si $0 < x < 1$ et si p est tel que $]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}[$, alors

$$\left]\frac{\frac{1}{p+1}+x}{2}, \frac{1}{p}\right[$$

est un voisinage qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments de D car il est de la forme $]\frac{1}{p+1}+\alpha, \frac{1}{p}[$ avec

$$\alpha = \frac{\frac{1}{p+1}+x}{2} - \frac{1}{p+1} > 0.$$

Il reste donc à montrer que, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}]$, l'intervalle $[\frac{1}{p+1}+\alpha, \frac{1}{p}]$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de D. Soit donc un tel α. Soit

$$E = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{p+1} + \alpha \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p}\right\}.$$

On veut montrer que E est fini. Il suffit de montrer que $\sup_{(m,n)\in E} \max(m,n)$ est fini. Si $(m,n) \in E$, on a

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\min(m,n)} + \frac{1}{\max(m,n)} > \frac{1}{\min(m,n)},$$

donc $\min(m,n) > p$, ce qui implique que $\min(m,n) \geq p+1$. Or

$$\frac{1}{p+1} + \alpha \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\min(m,n)} + \frac{1}{\max(m,n)} \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{\max(m,n)},$$

ce qui implique que

$$\alpha \leq \frac{1}{\max(m,n)},$$

soit encore que $\max(m,n) \leq \frac{1}{\alpha}$. On a donc bien montré que E est fini, et donc que

L'ensemble $\mathcal{A}$ des points d'accumulation de D est $\overline{C}$
et l'ensemble $\mathcal{I}$ des points isolés de D est $D \setminus \overline{C}$.

Exercice 5.

1. $\ker p$ est $p^{-1}(\{0\})$, image réciproque par la fonction continue p du fermé $\{0\}$, donc

$\ker\ p$ est fermé.

On a $\mathrm{Im}\ p = \ker(Id - p)$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}\ p$, alors $y = p(x)$ et donc $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Réciproquement, si $y \in \ker(Id - p)$, alors $y = p(y)$ ce qui implique que $y \in \mathrm{Im}\ p$. $\mathrm{Im}\ p$ est donc l'image réciproque par la fonction continue $Id - p$ du fermé $\{0\}$, donc

$\mathrm{Im}\ p$ est fermé.

2. Si E est complet, alors $\ker p$ et $\mathrm{Im}\ p$ qui sont des sous-espaces vectoriels fermés de E sont aussi complets. L'application $\phi : E \to \ker p \times \mathrm{Im}\ p$, qui à x associe $(x - p(x), p(x))$ est continue. Posons $\psi : \ker p \times \mathrm{Im}\ p \to E$ qui à (y,z) associe $y + z$. Cette application ψ est continue elle aussi. Enfin, on a $\phi \circ \psi(y,z) = (y + z - p(y+z), p(y+z)) = (y + z - p(z), p(z))$ (car $p(y) = 0$) et vaut aussi (y,z) (car $z \in \mathrm{Im}\ p$ implique $p(z) = z$). On a donc $\phi \circ \psi = Id$.
De même, $\psi \circ \phi(x) = x - p(x) + p(x) = x$ donc $\psi \circ \phi = Id$. On en déduit donc que E est uniformément homéomorphe à $\ker p \times$ $\mathrm{Im}\ p$ (car toute application linéaire continue est uniformément continue) donc

E est un espace de Banach si et seulement si $\ker\ p$ et $\mathrm{Im}\ p$ sont des espaces de Banach.

Problème.

1. Si f est dans E, alors il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

et donc

$$k(f) = \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq M < \infty$$

car la borne supérieure d'un ensemble borné non vide de réels existe toujours.

$$\forall f \in E, \qquad k(f) = \sup_{\substack{(x,y)\in I^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < +\infty.$$

2. 0 est $0-$lipschitzienne, la somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne et le produit d'une fonction lipschitzienne par un scalaire est encore lipschitzienne, donc

E est un sous-espace vectoriel de $C([0,1], \mathbb{R})$.

3. $\|f\|$ est bien définie sur E car toute fonction lipschitzienne est continue sur I, donc bornée. Si $\|f\| = 0$, alors $\|f\|_\infty = 0$, donc $f = 0$. La réciproque est claire.

Si $f \in E$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall x \neq y \in I, \qquad \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x - y|} = |\lambda| \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |\lambda| k(f),$$

donc $k(\lambda f) \leq |\lambda| k(f)$. En particulier, on a aussi, pour $\lambda \neq 0$, $k(\frac{1}{\lambda} f) \leq \frac{1}{|\lambda|} k(f)$, ce qui implique donc que $k(f) = k(\frac{1}{\lambda}\lambda f) \leq \frac{1}{|\lambda|} k(\lambda f)$, et donc $k(\lambda f) \geq |\lambda| k(f)$, ce qui implique que $k(\lambda f) = |\lambda| k(f)$. On en déduit que $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.

Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Pour cela, il suffit de vérifier que si $f, g \in E$, alors $k(f+g) \leq k(f) + k(g)$. Or

$$\forall x \neq y \in I, \qquad \left|\frac{(f+g)(x) - (f+g)(y)}{x-y}\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| + \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq k(f) + k(g),$$

et donc

$$k(f+g) \leq k(f) + k(g).$$

$\underline{\|\cdot\| \text{ est une norme sur } E.}$

4. **a.** Il suffit de montrer que Id: $(E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue. Cela découle de l'inégalité $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|$.

$\underline{\textbf{La topologie de } \|\cdot\| \textbf{ est plus fine que celle de } \|\cdot\|_\infty.}$

b. Prenons la suite de fonctions $f_n(x)$ définie par $f_n(x) = nx$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$, 1 si $x \in [\frac{1}{n}, 1]$. Alors $\|f_n\|_\infty = 1$. Cependant, $k(f_n) \geq 1$ car, pour tous x, y distincts dans $[0, \frac{1}{n}]$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| = n|x-y|$. En particulier, si les normes étaient équivalentes, on aurait l'existence de constantes α, β telles que $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|_\infty$, et donc $n \leq \|f_n\| \leq \beta \|f_n\|_\infty = \beta$, ce qui est absurde.

$\underline{\textbf{Les deux normes sur } E, \|\cdot\| \textbf{ et } \|\cdot\|_\infty \textbf{ ne sont pas équivalentes.}}$

5. **a.** Si (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$, alors elle est aussi de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ car $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|$. Comme $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est complet, on en déduit que

$\underline{(f_n) \textbf{ converge uniformément sur } I \textbf{ vers une fonction continue } f.}$

b. Comme $|k(f_n) - k(f_m)| \leq k(f_n - f_m) \leq \|f_n - f_m\|$, on en déduit que

$\underline{(k(f_n)) \textbf{ est une suite de Cauchy de nombres réels.}}$

La suite $(k(f_n))$ est donc bornée par une constante M. On a donc

$$\forall x, y \in I, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y|,$$

et donc, quand n tend vers $+\infty$, on obtient que

$$\forall x, y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|,$$

ce qui implique que

$$\underline{f \in E.}$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous m, n supérieurs ou égaux à N, on ait

$$\forall x \neq y \in I, \qquad \left|\frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)}{x-y}\right| \leq \varepsilon.$$

Faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient que, pour tout $n \geq N$,

$$\forall x \neq y \in I, \qquad \left|\frac{(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)}{x-y}\right| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} k(f_n - f) = 0.}$$

En conclusion, on a bien prouvé que

$\underline{E \textbf{ est un espace de Banach.}}$

6. Posons $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x + \frac{1}{m}}}\right| \leq \left|\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x + \frac{1}{m}}}\right|$$

$$\leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}} + \frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{x+\frac{1}{m}}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}}$$

qui tend vers 0 quand m, n tendent vers $+\infty$. La suite (f_n) est donc de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$ et converge donc vers la limite simple de la suite (f_n) qui est $f(x) = \sqrt{x}$. Cette fonction f n'est pas lipschitzienne. En effet, si f l'était, il existerait $M > 0$ telle que

$$\forall x \in [0,1]. \qquad |f(x) - f(0)| = \sqrt{x} \leq Mx,$$

ce qui ne peut être car $\sqrt{x}/x = 1/\sqrt{x}$ n'est pas bornée au voisinage de 0. En conclusion,

$\underline{(E, \|\cdot\|_\infty) \textbf{ n'est pas un espace de Banach.}}$