Université Aix-Marseille I **Centre de Télé-enseignement**
Licence de Mathématiques **Analyse et Topologie**

Corrigé du devoir 2

Problème.

1. Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur N. Pour $N = 1$, c'est clairement vrai. Supposons que ce soit vrai au rang N, et montrons que c'est vrai au rang $N+1$. Soit $(x_1, \dots, x_N, x_{N+1})$ une famille d'éléments de K et $(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_{N+1})$ une famille d'éléments de $[0, 1]$ telle que $\lambda_1 + \dots + \lambda_N + \lambda_{N+1} = 1$. Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 0$, alors $\lambda_{N+1} = 1$ et donc $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = x_{N+1} \in K$. Sinon, $\lambda_1 + \dots + \lambda_N > 0$ et alors

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = (\lambda_1 + \dots + \lambda_N) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} x_1 + \dots + \frac{\lambda_N}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} x_N \right) + \lambda_{N+1} x_{N+1}.$$

L'hypotèse de récurrence entraîne que

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} x_1 + \dots + \frac{\lambda_N}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} x_N \in K,$$

et comme $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 - \lambda_{N+1}$, on en déduit que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} \in K,$$

ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang $N + 1$.

2.a. f commute avec toute puissance de f, donc par linéarité avec Φ_m. Il en est alors de même de toute puissance f^k :

$$f^k \circ \Phi_m = \Phi_m \circ f^k.$$

Et donc par linéarité, on obtient

$$\underline{\forall m, n \geq 1, \quad \Phi_n \circ \Phi_m = \Phi_m \circ \Phi_n.}$$

2.b. Comme $\Phi_n(\Phi_m(K)) = (\Phi_n \circ \Phi_m)(K)$, d'après la question précédente, il suffit de prouver que $\Phi_n(\Phi_m(K)) \subset \Phi_n(K)$ pour pouvoir conclure. Or, d'après la question **1**, $\Phi_m(K) \subset K$, et donc $\Phi_n(\Phi_m(K)) \subset \Phi_n(K)$.

<u>**On a bien prouvé que,** $\forall m, n \geq 1$, $\Phi_n(\Phi_m(K)) \subset \Phi_n(K) \cap \Phi_m(K)$**.**</u>

3. Comme $(\Phi_{n_2} \circ \dots \circ \Phi_{n_N})(K) \subset K$, on obtient

$$(\Phi_{n_1} \circ \Phi_{n_2} \circ \dots \circ \Phi_{n_N})(K) \subset \Phi_{n_1}(K).$$

Comme les Φ_{n_k} commutent, on obtient donc, pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$(\Phi_{n_1} \circ \Phi_{n_2} \circ \dots \circ \Phi_{n_N})(K) = (\Phi_{n_k} \circ \Phi_{n_1} \circ \dots \circ \Phi_{n_{k-1}} \circ \Phi_{n_{k+1}} \circ \dots \circ \Phi_{n_N})(K) \subset \Phi_{n_k}(K).$$

On en déduit donc que

$$(\Phi_{n_1} \circ \Phi_{n_2} \circ \dots \circ \Phi_{n_N})(K) \subset \Phi_{n_1}(K) \cap \Phi_{n_2}(K) \cap \dots \cap \Phi_{n_N}(K),$$

et donc que $\Phi_{n_1}(K) \cap \Phi_{n_2}(K) \cap \dots \cap \Phi_{n_N}(K)$ est non vide car $(\Phi_{n_1} \circ \Phi_{n_2} \circ \dots \circ \Phi_{n_N})(K)$ n'est pas vide.

4. D'après la propriété 1.2.1 du chapitre 4, si $\bigcap_n \Phi_n(K) \neq \emptyset$, alors il existe une famille finie d'indices $(n_1, \ldots, n_N)$ telle que
$$\Phi_{n_1}(K) \cap \Phi_{n_2}(K) \cap \cdots \cap \Phi_{n_N}(K) = \emptyset,$$
ce qui n'est pas le cas.

5. Comme K est compact, K est borné. L'existence de M en découle.

6. Si $x \in \Phi_n(K)$, alors il existe $y \in K$ tel que $x = \Phi_n(K)$. Or
$$x - f(x) = \frac{1}{n}(y + f(y) + \cdots + f^{n-1}(y) - f(y) - \cdots - f^{n-1}(y) - f^n(y)) = \frac{1}{n}(y - f^n(y)).$$
Comme y et $f^n(y)$ sont dans K, on en déduit que
$$\underline{\forall x \in \Phi_n(K), \quad \|x - f(x)\| \leq \frac{2M}{n}.}$$

7. si x est un point fixe de f dans K, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Phi_n(K)$ car $x = \Phi_n(x)$. Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Phi_n(K)$, alors d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x - f(x)\| \leq \frac{2M}{n}$, ce qui implique que $f(x) = x$.

8. En conclusion, nous avons obtenu le théorème suivant :

Soit E un espace vectoriel normé, f une application linéaire continue de E dans E.

Soit K un compact convexe de E. Si K est stable par f, alors

f admet au moins un point fixe dans K.

Exercice 2.

1. Tout d'abord, il y a un oubli dans l'énoncé. Il fallait supposer que (F, d') est complet, sinon le résultat est faux. (Par exemple, si (F, d') est $\mathbb{R}_*^+$ muni de la distance usuelle, si $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle et si $f_n(x) = |x| + \frac{1}{n}$, alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f(x) = |x|$, admettent pour limite $\frac{1}{n}$ en 0 mais f n'admet pas de limite en 0 car $0 \notin F$.)

Supposons donc F complet. Soit (f_n) une suite de $BC_{x_0}(A, F)$ qui converge uniformément vers f. Pour montrer que $f \in BC_{x_0}(A, F)$, il suffit de montrer d'après le théorème 2.1.1 du chapitre 3 que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tels que pour tous x, y dans A, $d(x, x_0) \leq \alpha$ et $d(y, x_0) \leq \alpha$ implique $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.
Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A$, $d'(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Comme f_n admet une limite en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous x, y dans A, $d'(x_0, x) \leq \alpha$ et $d'(x_0, y) \leq \alpha$ implique $d'(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. En particulier, si x et y dans A sont tels que $d(x, x_0) \leq \alpha$ et $d(y, x_0) \leq \alpha$, on en déduit que
$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
d'où le résultat.

2. Soient $f, g \in BC_{x_0}(A, F)$ admettant pour limite ℓ et ℓ' en x_0. Si d_∞ est la distance usuelle sur $B(A, F)$, alors
$$\forall x \in A, \qquad d'(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, g).$$
Faisant tendre x vers x_0 dans l'inégalité précédente, on obtient
$$d'(\ell, \ell') \leq d_\infty(f, g),$$
ce qui prouve que L est $1-$lipschitzienne.

Exercice 3. *Remarque : Il y a une erreur dans l'énoncé. Initialement, je voulais poser cet exercice avec la fonction $\phi(f)(x) = \frac{1}{5}\int_0^x (f(t))^3 dt + \frac{4}{5}$. La solution donnée ici tient compte de cette modification. Néanmoins, l'exercice marche de manière analogue avec la fonction donnée dans l'énoncé (il est même plus simple !))*

1. Si f est continue sur $[0,1]$ alors $\phi(f)$ est continue sur $[0,1]$ donc

$$\underline{\boldsymbol{\phi} \textbf{ est bien définie.}}$$

Pour vérifier que Φ est continue, il suffit de montrer que si (f_n) est une suite de fonctions qui converge vers f, alors $(\phi(f_n))$ converge vers $\phi(f)$. Or

$$\phi(f_n)(x) - \phi(f)(x) = \frac{1}{5}\int_0^x \left\{[f_n(t)]^3 - [f(t)]^3\right\} dt,$$

et donc

$$\begin{aligned}\|\phi(f_n) - \phi(f)\|_\infty &\le \frac{1}{5}\int_0^1 \left|[f_n(t)]^3 - [f(t)]^3\right| dt \le \frac{1}{5}\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \left([f_n(t)]^2 + |f_n(t)||f(t)| + [f(t)]^2\right) dt \\ &\le \frac{1}{5}\|f_n - f\|_\infty (\|f_n^2\|_\infty + \|f_n f\|_\infty + \|f^2\|_\infty). \qquad (*)\end{aligned}$$

En particulier, si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0, il existe M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \le M$ ce qui implique que donc que

$$\|\phi(f_n) - \phi(f)\|_\infty \le \frac{1}{5}\|f_n - f\|_\infty (M^2 + M^2 + M^2)$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$\underline{\boldsymbol{\phi} \textbf{ est continue.}}$$

2. Si $f \in B$, alors $|f(t)| \le 1$ pour tout t et donc, pour tout $x \in [0,1]$, $|\phi(f)(x)| \le \frac{x}{5} + \frac{4}{5} \le 1$ ce qui montre que

$$\underline{\phi(B) \subset B.}$$

3. L'inégalité $(*)$ appliquée à f et g dans B nous montre que

$$\|\phi(f) - \phi(g)\|_\infty \le \frac{1}{5}\|f - g\|_\infty (1 + 1 + 1),$$

et donc ϕ est $3/5-$lispchitzienne sur B, ce qui implique que Φ admet un unique point fixe f_0 dans B car B est complet (c'est un fermé de $C[0,1]$ qui est un espace de Banach).

4. On a

$$f_0(x) = \frac{1}{5}\int_0^x [f_0(t)]^3 dt + \frac{4}{5}.$$

Comme f_0 est continue, on en déduit que $x \mapsto \frac{1}{5}\int_0^x [f_0(t)]^3 dt + \frac{4}{5}$ est continûment dérivable et donc que f_0 est de classe C^1. En dérivant la relation précédente, on a

$$f_0'(x) = \frac{1}{5}[f_0(x)]^3$$

et $f_0(0) = \frac{4}{5}$. On en déduit que $\frac{f_0'(x)}{f_0(x)^3} = \frac{1}{5}$ sur un intervalle sur lequel f_0 ne s'annule pas, et donc que

$$-2\frac{f_0'}{f_0^3} = -\frac{2}{5},$$

ce qui nous donne $\frac{1}{f_0^2} = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{f_0^2(0)}$, et donc

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{2}{5}x}}.$$

Remarque : avec la fonction Φ donnée dans l'énoncé, tout devenait plus simple : en effet, il est clair que la fonction 0 est point fixe de ϕ. Comme ϕ est contractante, ϕ admet au plus un point fixe, ce qui montre que ϕ a un unique point fixe $f_0 = 0$ et donne immédiatement la réponse aux questions 3 et 4.

Exercice 4.

1. $A \times B$ est compact. L'application $\Phi : E \times E \to E$ qui à (x, y) associe $x + y$ est continue. $A + B$ est l'image par ϕ du compact $A \times B$, donc

$$\underline{A + B \textbf{ est compact.}}$$

2. Soit (x_n) une suite de $A + B$ qui converge vers x. Il nous faut montrer que $x \in A + B$. Or, il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A et de B telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact, il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, $(a_{\phi(n)})$ converge vers $a \in A$. La suite $(x_{\phi(n)})$ est une sous-suite de (x_n) qui converge vers x donc $(x_{\phi(n)}$ converge vers x. On en déduit que la suite $(b_{\phi(n)})$ converge vers $x - a$. Comme B est fermé, on a $b = x - a \in B$. On a alors $x = a + b$ ce qui montre que $x \in A + B$. On a bien prouvé que

$$\underline{A \textbf{ compact et } B \textbf{ fermé} \Rightarrow A + B \textbf{ fermé.}}$$

3. Pour montrer que c'est faux, construisons un contre exemple. Prenons $E = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique usuelle. Soit A l'axe des abscisses, c'est à dire $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$. A est fermé car c'est l'image réciproque par l'application continue $\phi(x, y) = y$ du fermé $\{0\}$. B est fermé car c'est l'image réciproque par l'application continue $\psi(x, y) = xy$ du fermé $\{1\}$ réunion le fermé $\{(0, 0)\}$. Cependant $A + B = \mathbb{R}^2 \setminus A$. En effet, $(x, y) \in B$ implique $y \neq 0$ et donc si $(x', y') = (x', 0)$ est dans A, on a $y + y' = y \neq 0$, ce qui montre que $(x + x', y + y') \notin A$. Enfin, si $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, alors, comme $v \neq 0$, on a $(u, v) = (1/v, v) + (u - 1/v, 0)$ qui est dans $A + B$. Ce qui montre bien que $A + B = \mathbb{R}^2 \setminus A$.
Enfin , il est clair que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ n'est pas fermé : par exemple la suite $(0, 1/n)$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R} \setminus A$ qui converge vers $(0, 0) \in A$.

$$\underline{A \textbf{ et } B \textbf{ fermés n'implique pas } A + B \textbf{ fermé.}}$$