

CORRIGÉ DU DEVOIR N° 1

Exercice 1.

1. D'après l'exercice 0.22, tout ensemble infini contient un ensemble dénombrable, d'où l'existence de G .
2. La réunion de deux ensembles dénombrable est encore dénombrable. Il existe donc une bijection g de $F \cup G$ dans $\mathbb{N}$. Comme G est dénombrable, il existe une bijection h de G dans $\mathbb{N}$. En particulier, $f = h^{-1} \circ g$ est une bijection de $F \cup G$ dans G .
3. Si $x \notin F \cup G$, alors $\varphi(x) = x$ n'appartient pas à F . Si $x \in F \cup G$, alors $\varphi(x) = f(x)$ est dans G , et donc n'est pas dans F ; donc φ est bien définie.

Montrons que φ est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$.

- . Si $x \notin F \cup G$ et $y \notin F \cup G$, alors $\varphi(x) = x$ et $\varphi(y) = y$ donc $x = y$.
- . Si $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$, alors $\varphi(x) = f(x) = \varphi(y) = f(y)$, ce qui implique que $x = y$ car f est bijective.
- . Si $x \in F \cup G$ et $y \notin F \cup G$, alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique $f(x) = y$, soit $f(x) \notin G$. C'est absurde.
- . De même, on ne peut pas avoir $x \notin F \cup G$ et $y \in F \cup G$.

On a donc bien prouvé que φ est injective.

Montrons que φ est surjective. Soit $y \in E \setminus F$. Si y est dans G et si $x \in F \cup G$ tel que $f(x) = y$, alors $\varphi(x) = y$. Sinon $y \in E \setminus (F \cup G)$ ce qui implique que $y = \varphi(y)$. On a donc bien prouvé que φ est surjective donc bijective. En particulier, $E \setminus F$ et E sont équipotents.

Exercice 2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$|\langle x, y \rangle|^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 = n(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$n^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)$$

donc $m \geq n^2$. Pour $x_1 = \dots = x_n = 1$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) = n^2,$$

donc $m = n^2$.

3. Si $X = (x, y, z, t)$ et $Y = (1, 2, 3, 4)$ dans $\mathbb{R}^4$, alors

$$|x + 2y + 3z + 4t| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2 \leq \sqrt{30}$$

donc $M \leq \sqrt{30}$. On sait qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si la famille (X, Y) est liée. Si on prend $X = \lambda Y$ avec λ tel que $\|X\|_2 = 1$, c'est à dire que

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}} \right)$$

alors

$$\langle X, Y \rangle = \sqrt{30},$$

et donc $M = \sqrt{30}$.

Exercice 3.

1. Si $N_1(x, y) = 0$ alors $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, ce qui implique que $(x, y) = 0$. Remarquons que, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} N_1(\lambda(x, y)) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} + |\lambda x - \lambda y| + \left| \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} - |\lambda x - \lambda y| \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} + |\lambda| |x - y| + |\lambda| \left| \sqrt{x^2 + y^2} - |x - y| \right| \right) = |\lambda| N_1(x, y). \end{aligned}$$

Comme $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \leq N_1(x, y) + N_1(x', y').$$

On a aussi

$$|(x + x') - (y + y')| = |(x - y) + (x' - y')| \leq |x - y| + |x' - y'| \leq N_1(x, y) + N_1(x', y').$$

En particulier

$$N_1((x, y) + (x', y')) \leq N_1(x, y) + N_1(x', y'),$$

ce qui montre que N_1 est une norme. La boule unité de N_1 a l'allure suivante :

Si $N_2(x, y) = 0$ alors $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} = 0$ ce qui équivaut à $(x, y) = 0$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$N_2(\lambda(x, y)) = \sqrt{\lambda^2 \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)} = |\lambda| N_2(x, y).$$

Si (x, y) et (x', y') sont dans $\mathbb{R}^2$, alors

$$N_2((x, y) + (x', y')) = \left\| \left(\frac{x+x'}{3}, \frac{y+y'}{2} \right) \right\|_2 \leq \left\| \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2} \right) \right\|_2 + \left\| \left(\frac{x'}{3}, \frac{y'}{2} \right) \right\|_2$$

car $\|\cdot\|_2$ est une norme et donc

$$N_2((x, y) + (x', y')) \leq N_2(x, y) + N_2(x', y'),$$

ce qui montre que N_2 est une norme. La boule unité de N_2 a l'allure suivante :

2. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$N_2(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \leq \sqrt{\frac{\|(x, y)\|_\infty^2}{9} + \frac{\|(x, y)\|_\infty^2}{4}} = \|(x, y)\|_\infty \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} \leq \|(x, y)\|_\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_\infty &= \sqrt{\|(x, y)\|_\infty^2} = \sqrt{\max(|x|, |y|)^2} \\ &\leq \sqrt{\max(|x|, |y|)^2 + \min(|x|, |y|)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2. \end{aligned}$$

Il est clair qu'on a $\|\cdot\|_2 \leq N_1$.

Montrons que $N_1 \leq 4N_2$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{\frac{16}{9}x^2 + 4y^2} = 4\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}.$$

On a aussi

$$|x - y| \leq 4\sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$$

si et seulement si

$$(x - y)^2 \leq 16 \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)$$

soit si et seulement si

$$\frac{7}{9}x^2 + 3y^2 + 2xy \geq 0.$$

Si on regarde cette dernière expression comme un trinôme en x , on voit qu'elle est positive si et seulement si le discriminant de ce trinôme en x est négatif ou nul, soit si et seulement si

$$(2y)^2 - 4 \times 3y^2 \times \frac{7}{9} = -\frac{16}{3}y^2 \leq 0,$$

ce qui est évidemment le cas. En conclusion, on a bien

$$N_1(x, y) \leq 4N_2(x, y).$$

3. On a

$$|x| + |y| = 3\frac{|x|}{3} + 2\frac{|y|}{2} \leq \sqrt{3^2 + 2^2}N_2(x, y) = \sqrt{13}N_2(x, y)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; donc $k \leq \sqrt{13}$.

Si on regarde le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire si on prend par exemple (x, y) tel que $|x|/3 = 3$ et $|y|/2 = 2$ soit $x = 9$ et $y = 4$, on a

$$|x| + |y| = 13$$

et $N_2(x, y) = \sqrt{13}$ donc $k \geq \frac{N_2(x, y)}{N_1(x, y)} = \sqrt{13}$, ce qui implique que $k = \sqrt{13}$.

Exercice 4.

1. Supposons $d(x, y) < d(y, z)$. On a $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) = d(y, z) \leq \max(d(y, x), d(x, z))$. Or, comme $d(x, y) < d(y, z)$, la dernière inégalité entraîne que $\max(d(y, z), d(x, z))$ ne peut valoir $d(y, x)$ et donc $d(y, z) \leq d(x, z)$ ce qui implique que toutes les inégalités précédentes sont des égalités et donc que $d(x, z) = d(y, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$. De même si $d(x, y) > d(y, z)$.

2. Si $y \in B(x, r)$ alors $d(x, y) < r$. Si $z \in B(x, r)$, alors $d(x, z) < r$ et donc $d(y, z) < r$, soit $B(x, r) \subset B(y, r)$. De même pour l'autre inclusion.

Si $z \in B(x, r) \cap B(y, r')$ avec $r \leq r'$ alors $B(z, r) = B(x, r) = B(y, r)$, ce qui implique que $B(x, r) \subset B(y, r')$.

La distance discrète est un exemple de distance ultramétrique.

3. Il est clair que, pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et que $d(x, y) = d(y, x)$. Soient $x, y, z \in E$. Montrons que $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$. Si $x = y$ ou $x = z$ ou $y = z$, c'est clair. Supposons donc $x \neq y \neq z \neq x$. Il nous faut montrer que $k(x, z) \geq \min(k(x, y), k(y, z))$. Soit $n < \min(k(x, y), k(y, z))$. On a $x_n = y_n$ et $y_n = z_n$, donc $x_n = z_n$, ce qui implique que $n < k(x, z)$. Et donc

$k(x, z) \geq \min(k(x, y), k(y, z))$, ce qui prouve que d est une distance ultramétrique sur E .

- 4.1.** Si $x = r/s = r'/s'$, il faut montrer que $v_p(r) - v_p(s) = v_p(r') - v_p(s')$, c'est-à-dire que la valuation d'un rationnel est indépendante de la fraction choisie représentant ce rationnel. Or $r/s = r'/s'$ si et seulement si $rs' = r's$ et donc $v_p(rs') = v_p(r) + v_p(s') = v_p(r's) = v_p(r') + v_p(s)$, soit encore $v_p(r) - v_p(s) = v_p(r') - v_p(s')$. La définition est donc bien cohérente.

Si $x = r/s$ et $y = r'/s'$ alors $v_p(xy) = v_p(rr'/ss') = v_p(rr') - v_p(ss') = v_p(r) + v_p(r') - v_p(s) - v_p(s') = v_p(r) - v_p(s) + v_p(r') - v_p(s') = v_p(x) + v_p(y)$.

- 4.2.** Montrons tout d'abord que, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^*$, on a $v_p(x - y) \geq \inf(v_p(x), v_p(y))$. Si $k = \inf(v_p(x), v_p(y))$, il suffit de montrer que p^k divise $x - y$. Or $k \geq v_p(x)$ donc p^k divise x . De même, p^k divise y , et on obtient bien que p^k divise $x - y$, ce qui prouve que l'on a bien l'inégalité dans $\mathbb{Z}^*$. Si x, y sont dans $\mathbb{Q}^*$ et sont de la forme $x = r/s$ et $y = r'/s'$ avec r, r', s', s' dans $\mathbb{Z}$. Les nombres xss' et yss' sont dans $\mathbb{Z}$ donc $v_p(xss' - yss') \geq \inf(v_p(xss'), v_p(yss'))$. On a donc

$$\begin{aligned} v_p(xss' - yss') &= v_p(x - y) + v_p(ss') \geq \inf(v_p(xss'), v_p(yss')) \\ &= \inf(v_p(x) + v_p(ss'), v_p(y) + v_p(ss')) = \inf(v_p(x), v_p(y)) + v_p(ss'), \end{aligned}$$

et donc

$$v_p(x - y) \geq \inf(v_p(x), v_p(y)).$$

- 4.3.** Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire plus forte. Si $x \neq y \neq z \neq x$, on sait qu'on a $v_p(x - z) = v_p((x - y) - (z - y)) \geq \inf(v_p(x - y), v_p(y - z))$ et donc

$$d(x, z) = p^{-v_p(x-z)} \leq \max(p^{-v_p(x-y)}, p^{-v_p(y-z)}) = \max(d(x, y), d(y, z)).$$

- 4.4.** Si V est un voisinage de 0 pour la topologie p -adique alors V contient une boule de centre 0 et de rayon ε . Il suffit donc de montrer que toute boule de centre 0 et de rayon ε est dense dans $\mathbb{Q}$ pour la topologie usuelle de $\mathbb{Q}$. Intuitivement, dire qu'un rationnel x est proche de 0 pour la topologie p -adique, c'est dire que $v_p(x)$ est grand. Nous allons montrer que l'ensemble des rationnels pour lesquels $v_p(x)$ est grand est un ensemble dense dans $\mathbb{Q}$ pour la topologie usuelle.

Soit $x = r/s$ dans $\mathbb{Q}$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{p^n r}{p^n s + 1}$. On a $x_n = \frac{r}{s + p^{-n}}$ qui tend vers x pour la topologie usuelle. De plus, $v_p(p^n r) \geq n$ et $v_p(p^n s + 1) = 0$ car p ne divise pas 1. On en déduit que $v_p(x_n) \geq n$ et donc que $d(x_n, 0)$ tend vers 0. En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $x_n \in B(0, \varepsilon)$ et donc la boule de centre 0 et de rayon ε est bien dense dans $\mathbb{Q}$ pour la topologie usuelle. (cf. corollaire 5.4.3 du chapitre 1).

Si X est égal à l'ensemble vide, alors le complémentaire de X est $\mathbb{Q}$, qui est un voisinage de 0. X n'est manifestement pas dense dans $\mathbb{Q}$ donc la deuxième propriété énoncée est fausse.