CORRIGÉ DU DEVOIR N° 2

Exercice 1.

1. Si on suppose que A est finie, et si x_0 est un point d'accumulation de A , alors $\varepsilon = \min_{x \in A} N(x - x_0) > 0$. On a $B(x_0, \varepsilon/2) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ ce qui est absurde.
2. F_k est inclus dans la boule fermée de centre x_0 et de rayon k , donc F_k est bornée. Comme $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto d(x, x_0)$ est continue et que $[1/k, k]$ est fermé, on en déduit que F_k est fermé. Comme tout fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est compact, F_k est donc compact.
3. Si $A \cap F_k$ est infini, alors comme tout ensemble infini dans un compact admet un point d'accumulation, on en déduit que $A \cap F_k$ admet un point d'accumulation x . Comme $x \in F_k$, on a $x \neq x_0$. En particulier A admet x_0 et x comme points d'accumulation. C'est absurde.
4. Il est clair que $A \setminus \{x_0\} \supset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (F_k \cap A)$. Si $x \in A \setminus \{x_0\}$, alors $\varepsilon = d(x, x_0) > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $1/k \leq \varepsilon \leq k$, (il suffit de prendre $k \geq \max(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$), ce qui prouve que $x \in F_k$ et donc $A \setminus \{x_0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (F_k \cap A)$.
 $A \setminus \{x_0\}$ est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable, ce qui implique que A est dénombrable.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et φ l'application qui à une suite $u = (u_n) \in \ell^2$ associe u_n . Comme $|u_n| \leq \|u\|_2$, on en déduit que φ qui est linéaire est aussi continue. En particulier, l'application ψ qui à une suite (u_n) associe $|u_n|$ est aussi continue et donc $A = \psi^{-1}([0, a_n])$ est fermé.
2. Si $a \notin \ell^2$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = +\infty$. Si on définit la suite (u^p) d'éléments de A par $u_n^p = a_n$ si $n \leq p$ et par $u_n^p = 0$ si $n > p$, alors $\|u^p\|_2^2 = \sum_{n=0}^p |a_n|^2$ tend vers l'infini quand p tend vers l'infini, et donc A n'est pas bornée. En particulier, A bornée implique $a \in \ell^2$. Comme un ensemble compact est fermé et borné, on en déduit qu'une condition nécessaire pour que A soit compact est que $a \in \ell^2$.
- 3.1. La suite $(u_0^p)_p$ est une suite bornée de $\mathbb{C}$. Comme toute partie bornée de $\mathbb{C}$ est incluse dans un compact, on en déduit qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_0^{\varphi_0(p)})_p$ soit convergente vers un $x_0 \in \mathbb{C}$.
- 3.2. De même, la suite $(u_1^{\varphi_0(p)})_p$ est une suite bornée de $\mathbb{C}$. Il existe donc une fonction strictement croissante $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_1^{\varphi_0 \circ \varphi_1(p)})_p$ soit convergente vers un $x_1 \in \mathbb{C}$.
- 3.3. Les mêmes raisons qu'aux questions précédentes donnent le résultat.
- 3.4. On a $\varphi(p+1) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(\varphi_{p+1}(p+1))$. Ceci est supérieur à $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p+1)$ car pour toute fonction strictement croissante φ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a par récurrence sur n que $\varphi_{p+1}(n) \geq n$. Comme la composée de fonctions strictement croissantes est strictement croissante, on a $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p+1) > \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p) = \varphi(p)$ donc φ est strictement croissante.

Si $n \in \mathbb{N}$ et si $p \geq n + 1$, alors $u_n^{\varphi(p)} = u_n^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1} \circ \dots \circ \varphi_p(p))}$. Comme précédemment, la fonction $p \mapsto \varphi_{n+1} \circ \dots \circ \varphi_p(p)$ définie pour $p \geq n + 1$ est strictement croissante, donc la suite $u_n^{\varphi(p)} = u_n^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1} \circ \dots \circ \varphi_p(p))}$ est une sous-suite de la suite $(u_n^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(p)})$ qui converge vers x_n , donc la suite $(u_n^{\varphi(p)})$ converge vers x_n .

- 3.5.** Pour tout n , la suite $(u_n^{\varphi(p)})_p$ est de module inférieur ou égal à a_n et converge vers x_n . Par passage à la limite, on en déduit que $|x_n| \leq a_n$, et donc $x \in A$. Montrons que $(u^{\varphi(p)})_p$ tend vers x dans ℓ^2 . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

La suite $\left(\sum_{n=0}^N |u_n^{\varphi(p)} - x_n|^2\right)_p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, donc il existe un rang P tel que pour tout $p \geq P$, on ait

$$\sum_{n=0}^N |u_n^{\varphi(p)} - x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

En particulier, si $p \geq P$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{\varphi(p)} - x_n|^2 &= \sum_{n=0}^N |u_n^{\varphi(p)} - x_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n^{\varphi(p)} - x_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^N |u_n^{\varphi(p)} - x_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $\|u^{\varphi(p)} - x\|_2$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

On a donc bien prouvé que A est compact si et seulement si $a \in \ell^2$.

4. Si A est d'intérieur non vide, alors il existe une boule fermée $B'(x, \varepsilon)$ incluse dans A . Cette boule est compacte car elle est fermée dans la partie compacte A . La boule fermée $B'(0, \varepsilon)$ de centre 0 et de rayon ε est donc compacte car c'est l'image par la translation $y \mapsto y - x$ (qui est continue) de la boule fermée $B'(x, \varepsilon)$ qui est compacte. De même, la boule unité fermée est compacte car c'est l'image par l'homothétie $x \mapsto \frac{x}{\varepsilon}$ de $B'(0, \varepsilon)$. D'après le théorème de Riesz, l'espace ℓ^2 est de dimension finie. C'est absurde car la suite canonique $e^n = (e_p^n)_p$ définie par $e_p^n = 1$ si $p = n$ et 0 sinon est une famille libre infinie.

Exercice 3.

1. Voir le cours
2. Il est clair que F est bien définie car une primitive d'une fonction continue est continue et, si $x \in [0, 1]$, alors pour tout $t \in [0, x]$, $t - t^2 \in [0, 1]$. Si $\alpha \in]0, 1[$, si $x \in [0, \alpha]$ et si $f, g \in C[0, \alpha]$, alors

$$|F(f)(x) - F(g)(x)| = \left| \int_0^x (f(t - t^2) - g(t - t^2)) dt \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^x |f(t-t^2) - g(t-t^2)| dt \leq \int_0^x \left(\sup_{[0,\alpha]} |f-g| \right) dt \\ &= x \left(\sup_{[0,\alpha]} |f-g| \right) \leq \alpha \left(\sup_{[0,\alpha]} |f-g| \right), \end{aligned}$$

et donc F est une contraction sur $[0, \alpha]$.

3. g est solution de (E) si et seulement si $F(g) = g$. En effet, si g est solution de (E) , alors

$$F(g)(x) = 1 + \int_0^x g(t-t^2) dt = 1 + \int_0^x g'(t) dt = 1 + g(x) - g(0) = g(x).$$

Réciproquement, si $F(g) = g$ alors $g(0) = 1$ et $g'(t) = g(t-t^2)$.

D'après le théorème du point fixe appliqué à l'espace complet $C[0, \alpha]$, F admet un seul point fixe donc (E) admet une unique solution g sur $[0, \alpha]$. En particulier, comme c'est vrai pour tout $\alpha \in]0, 1[$, g existe et est unique sur $[0, 1[$ et est continue. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que g est de classe C^n . Supposons que ce soit vrai au rang n , c'est-à-dire que g soit de classe C^n . On en déduit que $t \mapsto g(t-t^2)$ est C^n car $t \mapsto t-t^2$ est C^∞ , donc que $x \mapsto \int_0^x g(t-t^2) dt$ est C^{n+1} et donc que g est C^{n+1} . On a donc bien prouvé que g est C^∞ sur $[0, 1[$.

4. Soit $f \in C[0, 1]$. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} (F \circ F)(f)(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + \int_0^{t-t^2} f(u-u^2) du \right) dt \\ &= 1 + x + \int_0^x \left(\int_0^{t-t^2} f(u-u^2) du \right) dt \\ &= 1 + x - \left[(x-t) \int_0^{t-t^2} f(u-u^2) du \right]_0^x \\ &\quad + \int_0^x (x-t)(t-t^2)' f((t-t^2) - (t-t^2)^2) dt \\ &= 1 + x + \int_0^x (x-t)(1-2t) f(t-2t^2+2t^3-t^4) dt. \end{aligned}$$

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[0, 1]$ et si $x \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} |(F \circ F)(f-g)(x)| &= \left| \int_0^x (x-t)(1-2t)(f-g)(t-2t^2+2t^3-t^4) dt \right| \\ &\leq \|f-g\|_\infty \int_0^x |(x-t)(1-2t)| dt. \end{aligned}$$

Si $x \in [0, 1/2]$ alors

$$\int_0^x |(x-t)(1-2t)| dt = \int_0^x (x-t)(1-2t) dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

Si $x \in [1/2, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^x |(x-t)(1-2t)| dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x-t)(1-2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^x (x-t)(2t-1) dt = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ &\leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $F \circ F$ est $1/3$ -lipschitzienne.

5. $F \circ F$ admet donc un unique point fixe g . D'après l'exercice 3.14, g est aussi point fixe de F donc solution de (E) . Enfin, g est C^∞ en faisant la même preuve par récurrence que pour la question 3.