Université Aix-Marseille I
Licence de Mathématiques

Centre de Télé-enseignement
Analyse et Topologie

Devoir 1

à envoyer au plus tard le 28 mars, le cachet de la poste faisant foi à l'adresse suivante :
Stéphane Rigat, CMI, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE CEDEX 13.

Exercice 1. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. On note

$$\widehat{f}: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \widetilde{f}: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & \to & \mathcal{P}(X) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B). \end{array}$$

1. Montrez que f est injective si et seulement si $\widehat{f}$ est injective.
2. Montrez que f est surjective si et seulement si $\widetilde{f}$ est injective.

Exercice 2. Soient (E, d) un espace métrique et A, B deux parties non vides bornées de E. On note

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)$$

et diam A le diamètre de A.
1. Montrer que diam A=diam $\overline{A}$.
2. Montrer que diam $(A \cup B) \leq$ diam $A+$ diam $B + d(A, B)$.

Exercice 3. On rappelle que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
1. Montrez que tout ensemble d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle est non dénombrable.
2. Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Montrez que $\mathbb{R} \setminus D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Trouver l'ensemble des points isolés et des points d'accumulation des ensembles suivants :
i. $A = \mathbb{Q}$,
ii. $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
iii. $C = \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$,
iv. $D = \{1/n+1/m, (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Pour l'ensemble D, on pourra montrer que, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}]$, l'intervalle $[\frac{1}{p+1} + \alpha, \frac{1}{p}]$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de D.

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $p : E \to E$ un projecteur continu, c'est à dire que p est une application linéaire continue telle que $p \circ p = p$. On note $\ker p = \{x \in E,\ p(x) = 0\}$ et $\mathrm{Im}\ p = p(E)$.
1. Montrer que $\ker p$ et Im p sont des sous-espaces fermés de E.
2. Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si $\ker p$ et Im p sont des espaces de Banach.

Problème. Soit E l'ensemble des fonctions f sur $I = [0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, lipschitziennes.
1. Montrer que

$$\forall f \in E, \qquad k(f) = \sup_{\substack{(x,y) \in I^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < +\infty$$

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1], \mathbb{R})$.
3. Montrer que $f \mapsto \|f\| = \|f\|_\infty + k(f)$ définit une norme $\|\cdot\|$ sur E (on admettra que toute fonction continue sur I est bornée).
4. **a.** Vérifier que la topologie de $\|\cdot\|$ est plus fine que celle de $\|\cdot\|_\infty$, c'est à dire que tout ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|$.
b. Démontrer que les deux normes sur E, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
5. On se propose de montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$.
a. Montrer que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction continue f.
b. Montrer que $(k(f_n))$ est une suite de Cauchy de nombres réels et en déduire que $f \in E$.
c. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} k(f_n - f) = 0.$$

Conclure.
6. Est-ce que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach ?