

DEVOIR 2

à envoyer au plus tard le 16 mai, le cachet de la poste faisant foi à l'adresse suivante :
Stéphane Rigat, CMI, 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE CEDEX 13.

Problème. On dit qu'un sous-ensemble non vide K d'un espace vectoriel réel ou complexe est convexe si, pour chaque $x, y \in K$ et chaque réel $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$. Soient E un espace vectoriel normé et K un sous-ensemble convexe de E .

1. Montrer que, pour chaque entier $N \geq 1$, chaque famille finie $(x_1, \dots, x_N)$ d'éléments de K et chaque famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ d'éléments de $[0, 1]$ vérifiant $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$, on a

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N \in K.$$

On désigne par f une application linéaire continue de E dans lui-même qui laisse K invariant (c'est-à-dire que $f(K) \subset K$). On note $f^0 = Id_E$ l'identité de E et on définit par récurrence, pour chaque entier $n \geq 1$, $f^n = f^{n-1} \circ f$. On note aussi, pour chaque entier $n \geq 1$,

$$\Phi_n = \frac{1}{n} [Id_E + f + \dots + f^{n-1}].$$

2. Montrer que, pour deux entiers $m, n \geq 1$,
 - a. $\Phi_n \circ \Phi_m = \Phi_m \circ \Phi_n$.
 - b. $\Phi_n(\Phi_m(K)) \subset \Phi_n(K) \cap \Phi_m(K)$.
3. Dédurre de la question précédente que, si $(n_1, \dots, n_N)$ est une famille d'entiers ≥ 1 ,

$$\Phi_{n_1}(K) \cap \Phi_{n_2}(K) \cap \dots \cap \Phi_{n_N}(K) \neq \emptyset.$$

On suppose dorénavant que K est convexe et compact.

4. Montrer que $\bigcap_n \Phi_n(K) \neq \emptyset$.
5. Justifier l'existence d'un réel $M \geq 0$ tel que, pour chaque $x \in K$, on a $\|x\| \leq M$.
6. Soient $n \geq 1$ et $x \in \Phi_n(K)$. Montrer que $\|x - f(x)\| \leq \frac{2M}{n}$.
7. Montrer que $\bigcap_n \Phi_n(K) = \{x \in K; f(x) = x\}$.
8. Enoncer sous forme de théorème le résultat obtenu.

Exercice 2. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, $\emptyset \neq A \subseteq E$, A et $x_0 \in \overline{A}$ et soient

$$B(A, F) = \{f : A \rightarrow F \mid f \text{ est bornée}\} \text{ et } BC_{x_0}(A, F) = \{f \in B(A, F) \mid \text{la limite } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe}\}.$$

1. Montrer que $BC_{x_0}(A, F)$ est un fermé de $B(A, F)$.
2. Soit L l'application

$$L : BC_{x_0}(A, F) \longrightarrow F \quad \text{définie par} \quad L(f) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Montrer que L est k -lipschitzienne, avec k à déterminer.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel normé $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ et l'application

$$\phi : C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1] \quad \text{définie par} \quad \phi(f)(x) = \frac{1}{5} \int_0^x (f(t))^3 dt.$$

1. Montrer que ϕ est bien définie et que ϕ est continue.
2. Montrer que si B est la boule unité fermée de $C[0, 1]$ alors $\phi(B) \subseteq B$.
3. Montrer qu'il existe un unique $f_0 \in B$ telle que $\phi(f_0) = f_0$.
4. Déterminer l'équation différentielle dont f_0 est solution. La résoudre.

Exercice 4. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Soient $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ et notons $A + B = \{x \in E \mid \exists a \in A, \exists b \in B : x = a + b\}$. Montrer que :

1. A, B compacts $\Rightarrow A + B$ compact.
2. A compact et B fermé $\Rightarrow A + B$ fermé.
3. Montrer que A et B fermés n'impliquent pas $A + B$ fermé.