Université Aix-Marseille I **Centre de Télé-enseignement**
Licence de Mathématiques **Analyse et Topologie**

Devoir n° 1
à rendre au plus tard le 19 décembre 2003,
le cachet de la poste faisant foi

Exercice 1. Soit E un ensemble, $F \subset E$ tel que F soit dénombrable et tel que $E \setminus F$ soit infini. On se propose de montrer que $E \setminus F$ est équipotent à E.

1. Montrer qu'il existe un sous-ensemble dénombrable G inclus dans $E \setminus F$.

2. Montrer qu'il existe une bijection $f : F \cup G \to G$.

3. Soit $\varphi : E \to E \setminus F$ qui à $x \notin F \cup G$ associe x et qui à $x \in F \cup G$ associe $f(x)$. Montrez que φ est bien définie et bijective. Conclure.

Exercice 2. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

1. Montrez que, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

2. Déterminer

$$m = \inf\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \text{ tels que } x_1 > 0, \ldots x_n > 0 \right\}.$$

3. Déterminer

$$M = \sup\{|x + 2y + 3z + 4t|,\ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}.$$

Exercice 3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N_1(x, y) = \max(\sqrt{x^2 + y^2}, |x - y|)$$

et

$$N_2(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}.$$

1. Montrez que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.

2. Montrez que $N_2 \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq N_1 \leq 4N_2$.

3. Déterminer le plus petit réel $k > 0$ tel que

$$\|\cdot\|_1 \leq kN_2.$$

Exercice 4. *Distance ultramétrique.* C'est une distance dont l'inégalité triangulaire est remplacée par celle-ci, plus forte :

$$\forall (x,y,z) \in E^3 \qquad d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$$

1. Montrer que si $d(x,y) \neq d(y,z)$ alors $d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$.

2. Montrer que, pour tout $y \in B(x,r)$, $B(x,r) = B(y,r)$. En déduire que si deux boules ont un point commun, alors l'une contient l'autre. Donner un exemple simple de distance ultramétrique.

3. Soit X un ensemble non vide et E l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ de X. Pour deux éléments x, y de E, on note $k(x,y)$ le plus petit entier n tel que $x_n \neq y_n$ et $d(x,y) = 1/k(x,y)$ si $x \neq y$, $d(x,y) = 0$ si $x = y$. Montrer que d est une distance ultramétrique sur E.

4. Soit p un nombre premier. On rappelle que la *$p-$valuation* v_p sur $\mathbb{Z}^*$ est définie par

$$n = (\text{sgn n}) \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)} \text{ (décomposition en facteurs premiers).}$$

Soit $x \in \mathbb{Q}^*, x = \frac{r}{s}$. On étend v_p à $\mathbb{Q}^*$ par $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$.

4.1. Montrer que la définition est cohérente, et que

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

4.2. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^*$, $x \neq y$, on a

$$v_p(x - y) \geq \inf(v_p(x), v_p(y)).$$

4.3. Montrer que les égalités $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) = p^{-v_p(x-y)}$ si $x \neq y$ définissent une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$, la distance $p-$adique.

4.4. Montrez que les voisinages de 0 pour la topologie $p-$adique sont denses pour la topologie induite par la métrique euclidienne. Montrez qu'il en est de même pour le complémentaire d'un voisinage de 0.