Université Aix-Marseille I **Centre de Télé-enseignement**
Licence de Mathématiques **Analyse et Topologie**

Devoir n° 2
à rendre au plus tard le 2 avril 2004,
le cachet de la poste faisant foi
(Ce texte est le sujet de l'examen de juin 2003)

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier, N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et d la distance associée à la norme N. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que x_0 est un *point d'accumulation* de A si et seulement si $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$. On suppose que A admet un seul point d'accumulation x_0. On se propose de démontrer que A est dénombrable.

1. Montrez que A est infinie.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrez que l'ensemble

$$F_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} \leq d(x, x_0) \leq k\}$$

est compact.

3. En déduire que $A \cap F_k$ est fini.

4. Montrez que

$$A \setminus \{x_0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (F_k \cap A).$$

En déduire que A est dénombrable.

Exercice 2. On considère $E = \ell^2$ le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des suites à valeurs complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty.$$

Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, on note

$$\|u\|_2 = \|(u_n)_n\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On se propose de montrer que l'ensemble

$$A = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq a_n\}$$

est compact si et seulement si $a \in \ell^2$.

1. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels positifs. Montrez que l'ensemble

$$A = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq a_n\}$$

est fermé dans E.

2. Montrez que, si l'ensemble A est borné, alors $a \in \ell^2$. En déduire que si A est compact, alors $a \in \ell^2$.

3. On suppose dans cette question que $a \in \ell^2$, et on se propose de montrer que l'ensemble A défini ci-dessus est compact. Soit donc $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, c'est-à-dire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, u^p est la suite $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n^p| \leq a_n.$$

3.1. Montrez qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_0^{\varphi_0(p)})_p$ soit convergente vers un $x_0 \in \mathbb{C}$.

3.2. Montrez qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_1^{\varphi_0\circ\varphi_1(p)})_p$ soit convergente vers un $x_1 \in \mathbb{C}$.

3.3. Soit $P \in \mathbb{N}$. Supposons construites des fonctions strictement croissantes φ_0, φ_1, …, φ_P de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $k \in \{0,\ldots,P\}$, la suite $(u_k^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(p)})_p$ soit convergente vers un $x_k \in \mathbb{C}$. Montrez qu'il existe une fonction strictement croissante $\varphi_{P+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{P+1}^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_P\circ\varphi_{P+1}(p)})_p$ soit convergente vers un $x_{P+1} \in \mathbb{C}$. En déduire qu'il existe une suite de fonctions $(\varphi_p)_p$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite de nombres complexes $(x_p)_p$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_k^{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(p)})_p$ soit convergente vers $x_k \in \mathbb{C}$.

3.4. Posons $\varphi(p) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(p)$. Montrez que la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ainsi construite est strictement croissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n^{\varphi(p)})_p$ est convergente vers x_n.

3.5. Montrez que la suite $x = (x_n)_n$ est dans A et que la suite $(u^{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans ℓ^2. Conclure.

4. Que vaut l'intérieur de A ?

Exercice 3. On se propose de montrer qu'il existe une unique fonction g de classe C^∞ sur $[-1,1]$ solution de l'équation

$$\begin{cases} g'(t) = g(t-t^2) & \forall t \in [-1,1] \\ g(0) = 1 \end{cases} \tag{E}$$

Pour $\alpha \in]0,1]$, on note $C[-\alpha,\alpha]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-\alpha,\alpha]$ qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Enoncez et démontrez le théorème du point fixe de Banach.

On définit

$$\begin{array}{rccl} F: & C[-1,1] & \to & C[-1,1] \\ & f & \mapsto & F(f)(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t-t^2)dt. \end{array}$$

2. Montrez que F est bien définie. Montrez que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, F est une contraction sur $C[-\alpha,\alpha]$.

3. En déduire que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une unique $g \in C[-\alpha,\alpha]$ solution de (E). Montrez que g est C^∞ sur $]-1,1[$.

4. Montrez que $(F\circ F)(f)$ est l'application qui à $x \in [-1,1]$ associe

$$1 + x + \int_{t=0}^x (x-t)(1-2t)f(t-2t^2+2t^3-t^4)dt$$

(on pourra intégrer par parties). En déduire que $f \mapsto (F\circ F)(f)$ est $5/6-$lipschitzienne de $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même.

5. Montrez qu'il existe une unique fonction g continue sur $[-1,1]$ solution de l'équation (E) et que g est C^∞.