Université Aix-Marseille I
Licence de Mathématiques

Centre de Télé-enseignement
Analyse et Topologie

Examen de juin 2004 : 2LMTT1
Documents, Calculatrices, Portables interdits.
Durée : 3h

Questions de cours.

1. Enoncez et démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.
2. Soit (E, d) un espace métrique. Montrez qu'une boule ouverte est un ouvert
3. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ une application. Montrez que f est continue en $a \in E$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
4. Montrez qu'une fonction linéaire entre deux espaces normés E et E' est continue si et seulement si elle est bornée dans la boule unité fermée de E.
5. Montrez que si E est un espace métrique et F une partie complète de E, alors F est fermé. Montrez que si E est complet et si F est fermée dans E, alors F est complète.

Problème. Dans tout ce qui suit, on considère (K, d) un espace métrique compact. On note

- $\mathcal{F}(K)$ l'ensemble des fonctions de K dans K
- $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble des fonctions continues de K dans K.
- $\mathcal{H}(K)$ l'ensemble des homémorphismes de K dans K.

1. a. Pour $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ dans $K \times K$, on note

$$D_\infty(u, v) = \max(d(x, x'), d(y, y')).$$

On rappelle que D_∞ est une distance sur $K \times K$. Montrez que $(K \times K, D_\infty)$ est compact.

b. Montrez qu'il existe un réel M tel que, pour tous x, y dans K, on ait $d(x, y) \leq M$.

2. Pour $f, g \in \mathcal{F}(K)$, on pose

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)).$$

a. Montrez que δ est bien définie et que δ est une distance sur $K \times K$.
Montrez que, si $f, g \in \mathcal{F}(K)$ et $h \in \mathcal{H}(K)$, on a

$$\delta(f, g) = \delta(f \circ h, g \circ h).$$

b. Montrez que $(\mathcal{F}(K), \delta)$ est complet.

3. Montrez que $\mathcal{C}(K)$ est une partie fermée de $(\mathcal{F}(K), \delta)$.

4. On munit $\mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K)$ de la distance Δ_∞ définie par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K), \quad \forall (f',g') \in \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K),$$
$$\Delta_\infty((f,g),(f',g')) = \max(\delta(f,f'), \delta(g,g')).$$

Montrez que l'application

$$(f,g) \in \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K) \mapsto f \circ g \in \mathcal{C}(K)$$

est continue.

5. Pour $f, g \in \mathcal{H}(K)$, on pose $\rho(f,g) = \delta(f,g) + \delta(f^{-1}, g^{-1})$.

a. Montrez que ρ est une distance sur $\mathcal{H}(K)$.

b. Montrez que pour $f, g \in \mathcal{H}(K)$ et h, isométrie surjective de K dans K, on a $\rho(f,g) = \rho(f \circ h, g \circ h)$.

c. On munit $\mathcal{H}(K) \times \mathcal{H}(K)$ de la distance R_∞ définie par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{H}(K) \times \mathcal{H}(K), \quad \forall (f',g') \in \mathcal{H}(K) \times \mathcal{H}(K),$$
$$R_\infty((f,g),(f',g')) = \max(\rho(f,f'), \rho(g,g')).$$

Montrez que les applications

$$(f,g) \in \mathcal{H}(K) \times \mathcal{H}(K) \mapsto f \circ g$$

et

$$f \in \mathcal{H}(K) \mapsto f^{-1} \in \mathcal{H}(K)$$

sont continues.

d. Montrez que $(\mathcal{H}(K), \rho)$ est complet.

6. On suppose dans cette question que $K = [0,1]$.

a. Soit $a \in]0,1[$. Est-ce qu'il existe un homéomorphisme h de $[0,1]$ dans lui-même tel que $h(0) = a$?

b. Soient $a, b \in]0,1[$. Montrez qu'il existe un homéomorphisme h de $[0,1]$ dans lui-même tel que $h(a) = b$ et $h(b) = a$.