Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

SUITES.

1 Suites convergentes

1.1 Définition.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que *la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Proposition. *La suite* $(u_n)_n$ *de nombres complexes converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\} \text{ est fini.}$$

Preuve. En effet, si $\varepsilon > 0$ et si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est fini, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\} \subset \{0, 1, \ldots, N\}$. En particulier, pour tout $n \geq N+1$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On a donc bien prouvé que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N+1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, et donc que $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Réciproquement, si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est inclus dans $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, et donc que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est fini. □

Proposition. *La suite* $(u_n)_n$ *de nombres complexes converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$ *si et seulement si la suite* $(|u_n - \ell|)_n$ *converge vers 0.*

Preuve. En effet, si $(v_n)_n = (|u_n - \ell|)_n$, on a

$$(\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad 0 \leq v_n \leq \varepsilon).$$

□

1.2 Suites stationnaires.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes. On dit que $(u_n)_n$ *est stationnaire* si et seulement si

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n = u_N.$$

Autrement dit, $(u_n)_n$ est constante à partir d'un certain rang.

Proposition. *Toute suite stationnaire est convergente.*

Preuve. Immédiate. □

1.3 Cas des suites réelles.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que :
– (u_n) est *majorée* si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq M.$$

– (u_n) est *minorée* si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq m.$$

– $(u_n)_n$ est *bornée* si et seulement si (u_n) est majorée et minorée.
– (u_n) converge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad u_n \geq A.$$

– (u_n) converge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad u_n \leq A.$$

Proposition. *Une suite qui converge vers $+\infty$ n'est pas bornée.*

Preuve. En effet, si la suite (u_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, on ait $u_n \leq M$.

Or, comme $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq M + 1$. On a alors : $\forall n \geq N, \quad M + 1 \leq u_n \leq M$, ce qui est absurde. □

Remarque. Par contre il existe des suites non bornées qui ne tendent pas vers $+\infty$. La suite $((-1)^n n)_n$ par exemple, ou alors la suite qui vaut n si n est pair et 1 si n est impair.

1.4 Unicité de la limite.

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes. Si $(u_n)_n$ converge, sa limite est unique.*

Preuve. En effet, supposons que la suite $(u_n)_n$ ait deux limites ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. Soit ε un réel strictement positif tel que $\varepsilon < \frac{1}{2}|\ell - \ell'|$.

Les disques $D(\ell, \varepsilon)$ et $D(\ell', \varepsilon)$ de centres ℓ et ℓ' et de même rayon ε sont disjoints. En effet, si ce n'est pas le cas et si z est dans ces deux disques, on a alors $|z - \ell| \leq \varepsilon$ et $|z - \ell'| \leq \varepsilon$. L'inégalité triangulaire nous donne alors $|\ell - \ell'| = |(\ell - z) + (z - \ell')| \leq |\ell - z| + |z - \ell'| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |\ell - \ell'|$, ce qui est impossible.

La suite $(u_n)_n$ convergeant vers ℓ il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on ait $u_n \in D(\ell, \varepsilon)$.

La suite $(u_n)_n$ convergeant vers ℓ' il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, on ait $u_n \in D(\ell', \varepsilon)$.

En particulier, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a $u_n \in (D(\ell, \varepsilon) \cap D(\ell', \varepsilon)) = \emptyset$. C'est absurde. Ceci prouve bien que nécessairement, $\ell = \ell'$, et donc que la limite est unique.

$\square$

1.5 Suites bornées.

Définition. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On dit que (u_n) est bornée si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes. Si $(u_n)_n$ converge, alors elle est bornée.*

Preuve. En effet, si ℓ est la limite de la suite $(u_n)_n$, et si $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On a alors, grâce à la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq N, \qquad |u_n| - |\ell| \leq ||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

donc : $\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq |\ell| + \varepsilon$.

En particulier, si $M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + \varepsilon)$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$, et donc $(u_n)_n$ est bornée. $\square$

Remarque. la réciproque est fausse : par exemple, la suite $((-1)^n)_n$ qui vaut alternativement 1 et -1 est bornée mais ne converge pas.

1.6 Suites extraites.

Définition. Soit $(u_n)_n$ et (v_n) deux suites de complexes. On dit que (v_n) *est une suite extraite de* $(u_n)_n$ si et seulement si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ convergent vers ℓ.*

Preuve. En effet, si toutes les suites extraites de (u_n) convergent vers ℓ et si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est l'identité, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = n$, alors $(u_{\varphi(n)})_n = (u_n)_n$ converge vers ℓ donc $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Réciproquement, si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, montrons que toutes les suites extraites de $(u_n)_n$ convergent elles aussi vers ℓ.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai au rang n, la stricte croissance de φ nous donne $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n + 1$, donc c'est vrai au rang $n+1$.

Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geq N$, comme $\varphi(n) \geq n \geq N$, on a $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$, et ceci prouve bien que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon,$$

et donc que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ.

□

Application. La suite $((-1)^n)_n$ n'est pas convergente.

En effet, si elle l'était, la suite extraite $((-1)^{2n})_n = (1)_n$ converge vers la même limite ℓ que $((-1)^n)_n$, donc $\ell = 1$. De même, la suite $((-1)^{2n+1})_n = (-1)_n$ qui est constante et égale à -1 converge vers $\ell = -1$, donc $\ell = 1 = -1$. C'est absurde.

2 Opérations sur les suites.

Théorème. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de complexes qui convergent vers ℓ et ℓ' et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors la suite de terme général $(u_n + \lambda v_n)_n$ converge vers $\ell + \lambda \ell'$.*

Preuve.

En effet, si $\varepsilon' > 0$, il existe un rang N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$.

Il existe un rang N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon'$.

En particulier, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda \ell')| = |(u_n - \ell) + \lambda(v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |\lambda||v_n - \ell'| \leq \varepsilon' + |\lambda|\varepsilon' = (1 + |\lambda|)\varepsilon'.$$

On a bien prouvé que,

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad |(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda \ell')| \leq \varepsilon.$$

En effet, il suffit, pour $\varepsilon > 0$ donné, de prendre ε' tel que $(1 + |\lambda|)\varepsilon' \leq \varepsilon$ pour avoir la conclusion désirée. □

Théorème. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de complexes qui convergent vers ℓ et ℓ'. Alors la suite de terme général $(u_n v_n)_n$ converge vers $\ell \ell'$.*

Preuve. On va prouver le lemme suivant :

Lemme. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de complexes telles que (u_n) soit bornée et $(v_n)_n$ tende vers 0. Alors $(u_n v_n)_n$ tend vers 0.*

Preuve du lemme. En effet, si $\varepsilon' > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|v_n| \leq \varepsilon'$ et il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

En particulier, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n v_n| \leq |u_n||v_n| \leq M\varepsilon'$.

Si maintenant, on prend $\varepsilon > 0$ quelconque et si on prend $\varepsilon' > 0$ tel que $M\varepsilon' \leq \varepsilon$, on voit que pour tout $n \geq N$ où N a été construit comme précedemment, on a $|u_n v_n| \leq \varepsilon$. Ceci prouve bien que $(u_n v_n)_n$ converge vers 0 et prouve le lemme.

Revenons à la preuve du théorème. On écrit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n v_n - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + u_n\ell' - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'.$$

La suite (u_n) converge, donc elle est bornée. D'après le lemme, la suite $(u_n(v_n - \ell'))_n$ converge vers 0.

Enfin, d'après le théorème précédent, la suite $((u_n - \ell)\ell')_n$ converge vers $0 \times \ell' = 0$.

On en déduit que la suite $(u_n v_n - \ell\ell')_n$ converge vers 0, ce qui prouve le théorème. □

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de complexes qui converge vers $\ell \neq 0$. Alors*
- *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait : $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$.*
- *La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.*

Preuve. En effet, si $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

En particulier, pour tout $n \geq N$, on a

$$|\ell| - |u_n| \leq ||\ell| - |u_n|| \leq |\ell - u_n| \leq \varepsilon = \frac{|\ell|}{2},$$

donc $|u_n| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$. Le premier point est prouvé.

En ce qui concerne le second point, on écrit que, pour $n \geq N$, on a $u_n \neq 0$. Donc, pour $n \geq N$, on a

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{\ell u_n}.$$

La suite $(\ell - u_n)$ tend vers 0 et la suite $(\frac{1}{\ell u_n})_{n \geq N}$ est bornée. On en déduit que la suite $(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell})_{n \geq N}$ converge vers 0. □

Proposition. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls telle que $(|u_n|)_n$ converge vers $+\infty$. Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ converge vers 0.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n| \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On a alors :

$$\forall n \geq N, \qquad \left|\frac{1}{u_n}\right| \leq \varepsilon.$$

□

3 Cas des suites réelles.

Théorème de passage à la limite. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle qui converge vers ℓ telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait $u_n \geq 0$. Alors $\ell \geq 0$.*

Preuve. Supposons que l'on ait $\ell < 0$. Posons $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$. Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon = \frac{\ell}{2} < 0$. Ceci contredit le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \geq 0$. $\square$

Théorème de convergence des suites croissantes majorées. *Soit (u_n) une suite de réels, croissante et majorée. Alors la suite (u_n) converge.*

Preuve. Posont $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. A est non vide, et comme $(u_n)_n$ est majorée, l'ensemble A est majoré. A possède donc une borne supérieure s.

Montrons que $(u_n)_n$ converge vers s.

Tout d'abord, s est majorant de A, donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq s$.

Si maintenant $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ n'est plus majorant de A, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > s - \varepsilon$.

La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N > s - \varepsilon$.

On a bien prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad s - \varepsilon < u_n \leq s.$$

Ceci prouve bien que $(u_n)_n$ converge vers s et achève la preuve du théorème. $\square$

Théorème des suites adjacentes. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que :*
– $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
– $(u_n)_n$ *est croissante et* $(v_n)_n$ *est décroissante*
– $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.
Alors $(u_n)_n$ et (v_n) convergent et ont même limite.

Preuve. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq v_0$. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante majorée donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n$. La suite $(v_n)_n$ est donc décroissante minorée donc convergente vers $\ell' \in \mathbb{R}$.

La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0 donc $\ell - \ell' = 0$, ce qui entraîne que $\ell = \ell'$. $\square$