Filtrage des signaux

DESS “Génie Informatique et Statistique”
Option “Codage et Compression des Signaux”

I. Transformations de Fourier

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes (on supposera $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Im(\alpha) > 0$, et $n \in \mathbb{Z}^+$)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_n(t) = \begin{cases} t\, e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II. Filtre analogique

On considère les polynômes de Chebyshev définis par

$$T_n(\omega) = \cos\left(n \operatorname{acos}(\omega)\right) \ ,$$

(acos est la fonction réciproque de cos) et les fonctions

$$M_n(\omega) = \frac{1}{1 + \epsilon T_{2n}(\omega)} \ ,$$

où ϵ est un nombre réel compris entre 0 et 1.

On cherche à construire un filtre analogique réalisable d’ordre fini, de réponse impulsionnelle h, tel que l’on ait

$$M_n(\omega) = |\hat{h}(\omega)|^2 \ .$$

Traiter le cas $n = 1$: montrer que l’on peut écrire

$$M_1(\omega) = \left| \frac{K}{i\omega - \alpha} \right|^2$$

où K est une constante et α un nombre complexe de partie réelle négative, que l’on explicitera. Vérifier que la fonction $\omega \to K/(i\omega - \alpha)$ est bien la transformée de Fourier $\hat{h}$ d’une fonction h, à expliciter.

Traiter de façon similaire le cas $n = 2$.

III. Filtre analogique et équation différentielle

On peut à partir de circuits analogiques obtenir des systèmes linéaires dont l’entrée $u(t)$ et la sortie $v(t)$ sont liés par une équation différentielle du type

$$\begin{aligned} a_N v^{(N)} &+ a_{N-1} v^{(N-1)} + \ldots + a_0 v \\ &= b_M u^{(M)} + b_{M-1} u^{(M-1)} + \ldots + b_0 u \ , \end{aligned}$$

complétée par des conditions initiales adéquates. Montrer que la fonction de transfert correspondante $m(\omega)$ est donnée par

$$m(\omega) = \frac{a_N (i\omega)^N + \ldots + a_0}{b_M (i\omega)^M + \ldots + b_0} = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)}$$

Montrer que le filtre est causal si et seulement si les racines de D ont une partie réelle négative.

IV. Multiplexage numérique

On suppose donnés 3 signaux numériques x,y,z à bande limitée à $[-\pi/6,\pi/6]$:

$$\hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega) = \hat{z}(\omega) = 0 \text{ pour tout } \omega \notin [-\pi/6,\pi/6] \ .$$

Le multiplexage consiste à tout d’abord moduler ces trois signaux de façon appropriée:

$$a_n = x_n \ , \quad b_n = y_n \cos(n\pi/3) \ , \quad c_n = z_n \cos(2n\pi/3)$$

puis les mélanger en les sommant: $w_n = a_n + b_n + c_n$.

1) Montrer que les TFD de a,b,c sont données par

$$\begin{aligned} \hat{a}(\omega) &= \hat{x}(\omega) \ , \\ \hat{b}(\omega) &= \left(\hat{y}(\omega - \pi/3) + \hat{y}(\omega + \pi/3)\right)/2 \ , \\ \hat{c}(\omega) &= \left(\hat{z}(\omega - 2\pi/3) + \hat{z}(\omega + 2\pi/3)\right)/2 \ . \end{aligned}$$

Etudier les supports respectifs de $\hat{a}$,$\hat{b}$,$\hat{c}$ et $\hat{w}$.

2) Montrer que x, y et z peuvent s’obtenir à partir de w par une nouvelle modulation similaire à la précédente, suivie d’un filtrage passe-bas.

V. Propriétés de la transformation de Fourier finie

On rappelle que la TFF d’un signal de longueur N (vecteur de dimension N) noté $f = \{f_0, \ldots f_{N-1}\}$ est le vecteur de dimension N noté $\hat{f} = \{\hat{f}_0, \ldots \hat{f}_{N-1}\}$, où

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\{-2i\pi kn/N\}$$

1) On peut utiliser la même formule pour définir $\hat{f}_k$ pour tout k entier. Montrer qu’alors pour tout k entier on a $\hat{f}_{k+N} = \hat{f}_k$.
2) Montrer que si tous les nombres f_n sont réels, alors $\hat{f}$ possède la symétrie Hermitienne
$$\hat{f}_k = \overline{\hat{f}_{N-k}} \ .$$
3) Montrer que si N est pair, on a
$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \sum_{m=0}^{N/2} f_{2m} e^{-2i\pi km/(N/2)} \\ &+ e^{i\pi k/N} \sum_{m=0}^{N/2} f_{2m+1} e^{-2i\pi km/(N/2)} \end{aligned}$$