Filtrage numérique; quantification

DESS "Génie Informatique et Statistique"
Option "Codage et Compression des Signaux"

I. Sous-échantillonnage de signaux numériques

On s'intéresse à la *décomposition polyphase*, qui consiste à associer à un signal numérique des versions sous-échantillonnées, sans perte d'information: à un signal $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ on associe les signaux

$$s = H^0 x \;:\; s_n = x_{2n} \;,$$

$$d = G^0 x \;:\; d_n = x_{2n+1} \;.$$

1) Montrer que la TFD de s est donnée par

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{x}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right) \;,$$

et expliciter la TFD $\hat{d}$ de d.

2) Expliciter les transformées en z correspondantes S et D.
3) Expliciter un schéma de reconstruction du signal x à partir de s et d, dans l'espace des suites, dans l'espace de Fourier et dans "l'espace z".

II. Codage par sous bandes de Haar

1) On considère les opérations

$$x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} u = h * x & \longrightarrow s \;:\; s_n = u_{2n} \\ v = g * x & \longrightarrow d \;:\; d_n = v_{2n} \;, \end{array} \right.$$

où h et g sont deux suites à support fini. Exprimer les TFD $\hat{s}$ et $\hat{d}$ en fonction de $\hat{x}$, ou les transformées en z respectives S et D de s et d en fonction de X.

2) On introduit les signaux σ et δ définis par

$$\sigma_n = \left\{ \begin{array}{ll} s_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

$$\delta_n = \left\{ \begin{array}{ll} d_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right.$$

et on note $y = y[x]$ un signal reconstruit à partir de s et d, défini par

$$y = \tilde{h} * \sigma + \tilde{g} * \delta \;, \qquad (1)$$

où $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ sont deux nouvelles suites à support fini. Exprimer Y en fonction de X (ou $\hat{y}$ en fonction de $\hat{x}$), et donner une condition nécessaire et suffisante pour que $y[x] = x$ pour tout x (reconstruction parfaite).

3) On considère le cas des filtres de Haar:

$$h_0 = h_1 = g_0 = -g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \;;\; h_n = g_n = 0 \;, \quad \forall n \neq 0{,}1$$

Vérifier qu'en prenant

$$\tilde{h}_0 = \tilde{h}_{-1} = \tilde{g}_0 = -\tilde{g}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;;$$

$$h_n = g_n = 0 \;, \quad \forall n \neq 0, -1$$

on obtient bien un schéma à reconstruction parfaite.

4) Réinterpréter la décomposition polyphase.

III. Quantification d'une variable aléatoire Laplacienne

On considère une variable aléatoire Laplacienne X, de densité $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x} \;,$$

λ étant un réel positif quelconque. On souhaite quantifier cette variable aléatoire sur $R = \log_2(M)$ bits. Pour cela, on choisit un "pas de quantification" Δ, et on définit $x_m = m\Delta$, $m = 0 \ldots M-1$. Le quantificateur est alors défini par

$$Q(x) = \left\{ \begin{array}{ll} y_m & \text{si } x \in [x_m, x_{m+1}[\;, \quad m = 0, \ldots M-2 \\ y_+ & \text{si } x \in [x_{M-1}, \infty[\end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout m, le y_m qui minimise la distorsion partielle $\int_{x_m}^{x_{m+1}} (x-y_m)^2 \rho(x)\, dx$ est donné par

$$y_m = \frac{\int_{x_m}^{x_{m+1}} x\rho(x)\, dx}{\int_{x_m}^{x_{m+1}} \rho(x)\, dx} \;,$$

et une expression similaire pour y_+.
2. Exprimer y_m et y_+ explicitement en fonction de Δ et λ. Montrer que dans la limite "haute résolution" $\lambda\Delta \ll 1$, on retrouve le quantificateur uniforme

$$y_m = (m + 1/2)\Delta \;,$$

et que

$$y_+ = (M-1)\Delta + 1/\lambda \;.$$

3. Montrer que la distorsion s'exprime comme une fonction "compliquée" (mais néanmoins explicite) de $\lambda\Delta$. Le Δ optimal est obtenu en minimisant la distorsion numériquement.
4. On se place maintenant complètement dans le cadre de l'approximation "haute résolution" du cours, qui fournit la règle des 6dB. Dans cette approximation, et en négligeant le bruit de saturation, exprimer la distorsion en fonction de M, Δ et λ.