Filtrage, échantillonnage des signaux déterministes

DESS “Génie Informatique et Statistique”
Option “Codage et Compression des Signaux”

On s’intéresse ici à la mise en œuvre de certaines opérations élémentaires du traitement du signal, à savoir les opérations de filtrage, interpolation et sous-échantillonnage.

L’objet du TP est d’écrire quelques fonctions matlab, et d’illustrer leur fonctionnement par quelques exemples sur des signaux synthétiques et réels.

Compte-rendu:

1) *un rapport de quelques pages, décrivant le travail effectué et contenant des illustrations.*
2) *les fichiers source des fonctions écrites.*

I. Transformation de Fourier, FFT, et filtrage dans le domaine fréquentiel

La transformation de Fourier discrète (finie en fait) peut s’effectuer via l’algorithme de FFT. L’instruction MATLAB `fft` permet d’effectuer une transformation de Fourier directe, et l’instruction `ifft` effectue des transformations de Fourier inverses.

L’instruction `fftshift` permet de transformer la sortie de `fft` de sorte à replacer les fréquences négatives avant les fréquences positives. Elle est surtout utile pour visualiser une transformée de Fourier, mais d’un usage plus complexe à l’intérieur de calculs.

Partant d’un signal numérique, calculer sa transformée de Fourier et son spectre (le module carré de la transformée de Fourier). Effectuer des filtrages passe-bas avec un filtre idéal dans le domaine fréquentiel.

II. Filtrage numérique: passe-bas et passe-haut

La fonction `conv` permet d’effectuer un filtrage FIR (attention aux effets de bord: la longueur du signal filtré est différente de celle du signal original).

La fonction `filter` permet de mettre en œuvre un filtrage FIR ou IIR par filtrage récursif. Par exemple

```
g = filter(b,a,f)
```

retourne la solution g de l’équation récursive

$$\sum_{k=0}^{N} a_k g_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{M} b_k f_{n-k}$$

Le choix $a = \delta$ donne un filtrage FIR, c’est à dire un filtrage de convolution avec la suite finie b.

1) En utilisant la fonction `filter`, effectuer un filtrage passe bas et un filtrage passe haut de la forme

$$y_n = \frac{1}{2}\,(x_n + x_{n-1})\ , \quad y_n = \frac{1}{2}\,(x_n - x_{n-1})\ .$$

(on se persuadera par un calcul simple -i.e. une TFD-, qu’il s’agit bien de filtres passe-bas et passe-haut).

2) Même question avec le filtre défini par

$$y_n = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x_{n-k}$$

(dans ce cas aussi, on calculera la TFD de y pour s’assurer qu’il s’agit bien d’un filtrage passe-bas).

III. Interpolation des signaux à bande limitée

L’hypothèse de limitation de bande permet d’obtenir des formules simples d’interpolation. Si on se donne un signal numérique de longueur donnée N, il est possible de lui associer des “valeurs intermédiaires” en utilisant la FFT: il suffit pour cela de calculer dans un premier temps la transformée de Fourier du signal de départ (elle sera de longueur N elle aussi), puis de la prolonger vers les hautes fréquences par des valeurs nulles. On obtient ainsi une transformée de Fourier de longueur $N' \geq N$, qui par transformation de Fourier inverse fournira une version sur-échantillonnée du signal original.

Ecrire une fonction qui effectue ces transformations.

IV. Sous-échantillonnage

Inversement, partant d’un signal de longueur donnée N, on sait qu’un sous-échantillonnage de ce signal produit presque immanquablement un phénomène de repliement de spectre. Il est nécessaire de procéder à un filtrage passe-bas préalable avant de sous-échantillonner.

1) Illustrer le phénomène de repliement de spectre sur un exemple.
2) Ecrire une fonction qui sous-échantillonne un signal d’un taux de sous-échantillonnage donné, après filtrage préalable.