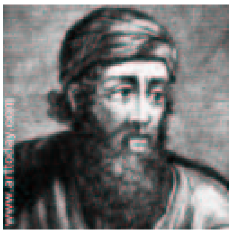
Licence Pluridisciplinaire, Culture et Formation Scientifique

Université de Provence

Année 2004-05

UE1, Culture Générale de Mathématiques 1
Recueil d'exercices
Arithmétique.



Pythagore de Samos (environ 569-475 avant notre ère)

Euclide d'Alexandrie (environ 325-265 avant notre ère)

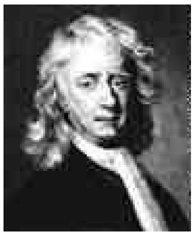
Archimede de Syracuse (287-212 avant notre ère)

Eratosthene de Syrène (276-194 avant notre ère)

René Descartes (1596-1650)

Pierre de Fermat (1601-1665)

Blaise Pascal (1623-1662)



Isaac Newton (1643-1717)

Abraham De Moivre (1667-1754)

Leonhard Euler (1707-1783)

I. Numération

A. Exercices

1. Donner l'écriture en base dix des nombres dont l'écriture binaire (en base deux) est
a. $(100111)_2$ **b.** $(100101111)_2$
c. $(1001001111)_2$ **d.** $(10010001111)_2$

2. Donner l'écriture en base dix des nombres dont l'écriture en base quatre est
a. $(23)_4$ **b.** $(123)_4$
c. $(3333)_4$ **d.** $(1230)_4$

3. Ecrire les nombres proposés
a. 100 en base six **b.** 423 en base trois
c. 256 en base cinq **d.** $(11244)_5$ en base dix
e. $(23)_5$ en base sept
On utilisera les deux méthodes pour passer du système décimal à une autre base.

4. Pour écrire un nombre en base douze, on utilise les chiffres usuels, auxquels on adjoint deux caractères, par exemple D pour dix et Z pour onze.
a. Ecrire en base dix les nombres $(2Z8)_{12}$ et $(2D2)_{12}$.
b. Ecrire en base douze les nombres 17 et 166.

5. Exercices :
a. Construire la table d'addition en base sept
b. Calculer $(24)_7 + (12)_7$.
c. Calculer $(45)_6 + (23)_6$ et $(53)_8 + (67)_8$

6. Exercice :
a. Construire la table de multiplication en base quatre
b. Poser la multiplication et calculer le produit $(31)_4 \times (23)_4$
c. Vérifier le résultat en convertissant chaque facteur et le produit en base dix.

7. Soit b un entier positif, donner l'écriture de $(b+1)^3$ dans la base b.

8. Donner les tables d'addition et de multiplication en base 5 et effectuer les opérations suivantes :
a. $(3042)_5 + (123)_5$ **b.** $(142)_5 \times (23)_5$.

9. Sachant que l'on a $(58)_b + (72)_b = (141)_b$, déterminer b puis calculer $(58)_b \times (72)_b$.

10. Quel est le plus grand nombre décimal que l'on peut écrire en binaire à l'aide de 3 chiffres ? 6 chiffres ? 7 chiffres ? 10 chiffres ?

11. Quel est le plus grand nombre décimal que l'on peut écrire en base 16 à l'aide de 2 chiffres ? 5 chiffres ? 10 chiffres ?

12. Sachant que l'on a $(341)_{10} = (2331)_b$, donner un encadrement de b^3 et en déduire b.

13. Quels sont les nombres de 3 chiffres qui s'écrivent xyz en base 7 et zyx en base 11 ?

14. Quels sont les nombres de 3 chiffres qui s'écrivent xyz en base 5 et zyx en base 7 ?

15. Existe-t-il des nombres de 3 chiffres s'écrivant xyz en base 4, et yzx en base 6 ?

16. Le but de cet exercice est de déterminer un nombre entier a. Ce nombre s'écrit avec 4 chiffres, il est supérieur à 7 000, il est multiple de 45, il est impair et le chiffre des milliers est le double de celui des centaines. Quel est ce nombre ?

17. Expliciter le système que nous utilisons pour compter les jours, heures, minutes, secondes sous forme d'une formule. Même question pour le système de mesure des angles : degré, minute d'arc, seconde d'arc.

B. Le code bibinaire

Le chanteur Boby Lapointe était aussi un mathématicien et a proposé son système de numération. Il s'agit du système BIBINAIRE, car comme beaucoup de réformateurs des systèmes de numération Lapointe rejettait le système décimal actuel notamment cause des expressions du genre soixante-seize ou quatre-vingt-dix-sept.

Il existe le BIBI parlé, le BIBI écrit que quelques exemples vont vous faire découvrir :

Les naturels de zéro à quinze sont écrits en base deux : 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, et 1111 ; Soit en écrivant des zéros inutiles : 0000, 0001, 0010, 0011, 0100...

Découpant l'écriture de ces naturels en tranches de deux chiffres, on obtient quatre groupements possibles (00, 01, 10, et 11).

Pour les groupes de deux chiffres terminant l'écriture d'un naturel, on choisit quatre voyelles : on associe 00 à O ; 01 à A ; 10 à E ; 11 à I.

pour le premier groupe de deux chiffres, on choisit quatre consonnes : on associe 00 à H ; 01 à B ; 10 à K et 11 à D

Utilisant ce code, voici l'écriture des seize premiers naturels : HO, HA, HE, HI, BO, BA, BE, BI, KO, KA, KE, KI, DO, DA, DE et DI.

On considère alors une numération de position de base seize, et on obtient par exemple les codes suivants :
$31 = (1 * 16) + 15 = HADI$
$16 = (1 * 16) + 0 = HAHO$
$181 = (11 * 16) + 5 = KIBA$
$1000 = (3 * 16^2) + (14 * 16) + 8 = HIDEKO$

a. Ecrire en base dix les naturels suivants : $DOKODA$, $KIDOBEHA$, $HABIHABOBO$ et $BOBO$.

b. Traduire en système BIBI : dix-mille ; mille-neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf.

c. Effectuer les opérations suivantes : $HABI \times HABI$ et $HABI + HABI$.

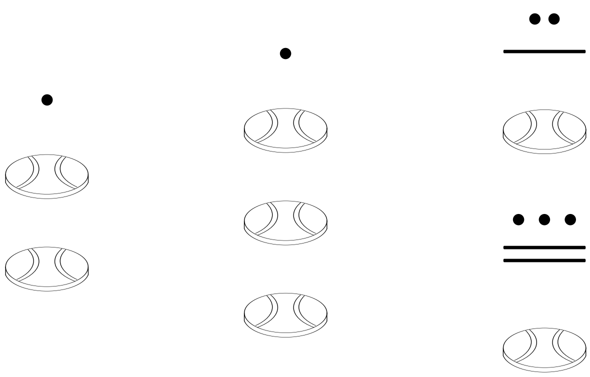
d. Ecrire et apprendre par coeur la table de multiplication par BA.

C. Le système de numération Maya

Le système de numération utilisé par les prêtres astronomes Mayas est un système de numération de position en base 20, dans lequel les nombres sont constitués de haut en bas (au lieu de l'être de gauche à droite comme dans le système arabe que nous utilisons), basé sur les symboles de la TABLE I, qui tiennent lieu de chiffres.

1. Comment s'écrit le nombre 20 dans le système de numération Maya ?

2. Quels sont les nombres représentés par les symboles suivants :



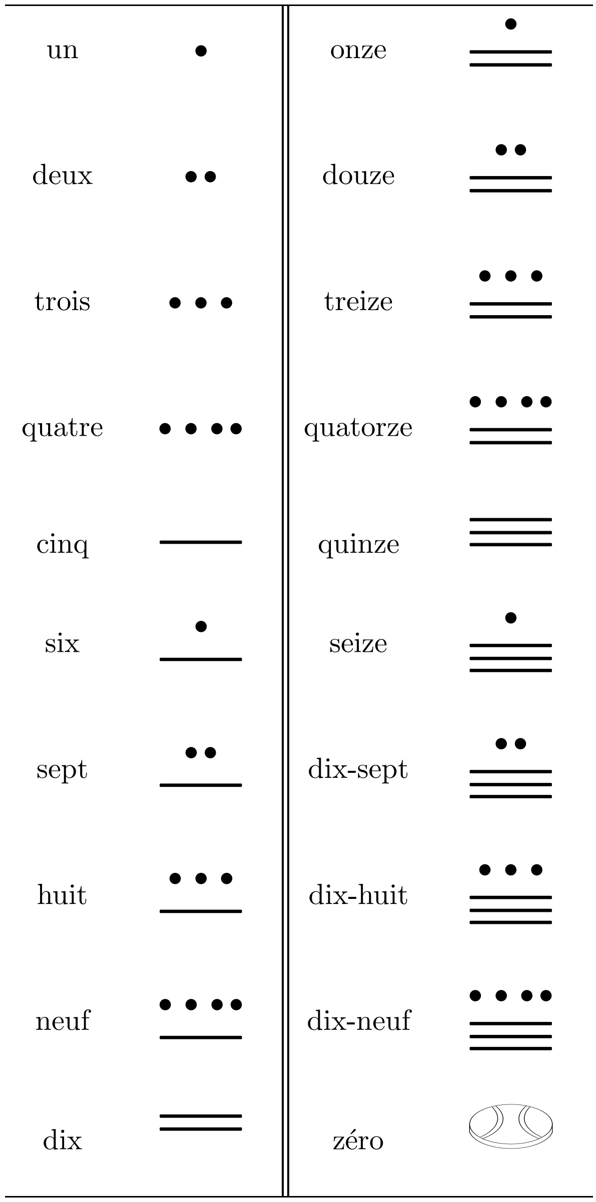


TABLE I
SYMBOLES UTILISÉS DANS LE SYSTÈME DE NUMÉRATION MAYA

3. La construction des symboles tenant lieu de chiffres repose elle aussi sur un système de numération ; que peut-on dire de ce dernier ? Justifier l'expression "système de numération hybride"

D. Correction d'erreurs

Comme tous les supports physiques (comme par exemple les CDs) ne sont pas parfaits, on utilise pour stocker des données des techniques permettant de corriger des erreurs, que l'on appelle "codes correcteurs d'erreurs". Un code correcteur d'erreurs associe à des mots binaires d'une longueur fixée des mots plus longs, dans lesquels une redondance a été introduite afin de pouvoir corriger un bit qui aurait été entâché d'erreur.

On considère ici l'un des plus simples de ces codes, le code de *Hamming (7,4)*, qui associe un mot binaire de 7 bits à tout mot binaire de 4 bits. Cette opération se fait en écrivant les mots sous forme de vecteurs colonne (à 4 ou 7 lignes), et en appliquant aux vecteurs à 4 lignes la matrice 7×4 suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(les opérations se faisant modulo 2). Par exemple, l'image codée $\mathbf{s}' = \mathbf{G}\mathbf{s}$ par $\mathbf{G}$ du mot $\mathbf{s} = 1010$ est le mot $\mathbf{s}' = 1010010$.

La détection d'erreurs s'effectue en appliquant au mot de 7 bits considéré la matrice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat obtenu (un mot de 3 bits) est appelé *syndrome*. Si le syndrome vaut 000, on conclut qu'il n'y a pas d'erreur. Sinon, on conclut qu'il y a un bit faux, dont la position coïncide avec la colonne à laquelle apparaît le syndrome dans $\mathbf{H}$.

1. Combien y a t-il de mots de 4 bits différents ? de mots de 7 bits différents ?

2. Calculer les mots codés associés à 1000, 1100, 1001, et vérifier le résultat en calculant le syndrome.

3. Vérifier et corriger éventuellement les mots de 7 bits suivants : 1010110, 1010100, 1001010 et 1001110.

4. Cette technique permet elle de corriger toutes les erreurs possibles ? si non, donner un exemple d'erreur non corrigée par cette méthode.

II. Entiers, nombres premiers, division Euclidienne

A. Division, divisibilité

1. Déterminer les 20 premiers nombres premiers.

2. Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants

a. 658	**b.** 420
c. 8820	**d.** 10200
e. 65536	**f.** 384

3. Calculer les pgcd et ppcm des paires d'entiers suivants

a. (31,321)	**b.** (300,408)
c. (13230, 2940)	**d.** (3534,198)
e. (1111,121)	**f.** (8820,420)

4. Déterminer le plus petit entier n tel que $(n \times 3240)$ soit un carré parfait

5. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.
Donner la décomposition en facteurs premiers de $2^{11} - 1$.

6. (a) Utiliser l'identité

$$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$$

pour calculer mentalement le carré de 988.

(b) Montrer que pour élever au carré un nombre se terminant par 5, il suffit multiplier le nombre de dizaines qu'il contient par le nombre entier immédiatement supérieur, et de "coller" 25 à la droite du nombre ainsi obtenu.

(c) Montrer que le produit de deux nombres qui se terminent par 76 se termine lui aussi par 76.

(d) En déduire un nombre de 3 chiffres a tel que tout produit de deux nombres se terminant par a se termine lui aussi par a.

7. Soient a et b deux entiers positifs, montrer que

$$\text{ppcm}(a, b) \times \text{pgcd}(a, b) = ab$$

8. a) Effectuer la division euclidienne de 1812 par 1572, en déduire :

$$d = \text{pgcd}(1812, 1572), \quad \text{ppcm}(1812, 1572)$$

et deux entiers relatifs u et v tels que $d = 1812u + 1572v$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$437x - 241y = 1 \ , \quad 2520x - 3960y = 6480$$

9. Trouvez la solution dans $\mathbb{Z}$ des systèmes suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + y + z & = 100 \\ x + 8y + 50z & = 156 \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{ll} x + y + z & = 100 \\ x + 6y + 21z & = 121 \end{array} \right.$$

10. Déterminer le reste de la division Euclidienne de 1971^{1000} par 7.

11. a) Montrer qu'un entier (représenté en base 10) est divisible par 11 si et seulement si la différence entre

la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

b) Déterminer a et b de manière que l'entier $(aabb)_{10}$ soit un carré parfait. Indication : on pourra montrer que $a+b$ doit être divisible par ... 11 !

12. (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

$$11u + 31v = 1$$

(b) En déduire des entiers positifs x et y tels que :

$$11x + 31y = 755$$

(c) Donner des entiers q, a et b tels que $0 \leq a < 11$, $0 \leq b < 31$ et

$$\frac{755}{341} = q + \frac{a}{11} + \frac{b}{31}$$

B. Histoires de bulles

Dans le cas où une bêtabulle[1] éclate, elle fait soit 42 soit 44 nouvelles bêtabulles. On se demande combien d'éclatement il faut pour produire 1993 bêtabulles.

1. On note a et b les nombres d'éclatements en respectivement 42 et 44 bêtabulles. Après avoir remarqué que chaque éclatement produit soit 41 soit 43 nouvelles bêtabulles, montrer que

$$41a + 43b = 1992\ , \quad (a, b \in \mathbb{Z}^+)\ .$$

2. Combien d'éclatements a-t-il fallu pour produire 1993 bêtabulles ?

C. Ah la vache !

Un cultivateur possède des vaches d'Aubrac et des vaches mauves. Il sait que 3 vaches d'Aubrac et 25 vaches mauves produisent en 5 jours 13 litres de lait de plus que 22 vaches d'Aubrac et 5 vaches mauves en 6 jours. Les vaches sont en outre d'une régularité parfaite, et produisent tous les jours le même nombre, entier, de litres de lait.

1. On note x et y les productions journalières respectives d'une vache d'Aubrac et d'une vache mauve. Montrer que

$$95y - 117x = 13\ .$$

2. Ce problème possède-t-il des solutions ? Si oui, calculer toutes les valeurs possibles de x et y.

3. En plus d'être d'une régularité exemplaire, les vaches font également preuve d'un civisme qui les honore, et limitent leur production à moins de 100 litres par jour pour respecter les quotas laitiers. Quelle est leur production quotidienne ?

4. Rien à voir avec les vaches : déduire des calculs précédents les développements en fraction continue de 117/95 et 95/117.

[1] Une bêtabulle est une grosse alphabulle.

D. Raisonnement par récurrence

1. Montrer que pour tout entier positif n :
   a. $n^3 - n$ est divisible par 3,
   b. $n \leq n! \leq n^n$
   c. $\dfrac{(5n)!}{40^n \times n!}$ est un entier
   d. $n!+1$ est suivi d'au moins $n-1$ entiers divisibles.

2. Montrer par récurrence les identités suivantes

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}\ ,\\ \sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4}\ ,\\ \sum_{k=0}^{n} k^4 &= -\frac{n}{30} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^5}{5}\ .\end{aligned}$$

3. Donner le reste de la division Euclidienne par 7 des nombres suivants
   a. 4^{999} **b.** 4^{1000}
   c. 4^{1001} **d.** 4^{1002}

4. Montrer par récurrence que les restes de la division Euclidienne de 4^k, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ par 7 sont successivement $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2 \ldots$.

5. En considérant $\binom{n+k}{k}$, montrer que le produit de k entiers positifs consécutifs est toujours divisible par $k!$.

6. Montrer que si p est premier alors $\binom{p}{k}$ est divisible par p pour tout $k \in \{1, \cdots, (p-1)\}$

7. (a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$(1,15)^n \geq 1 + 0,15n$$

i. par récurrence

ii. en utilisant la formule du binôme de Newton.

(b) A-t-on pour tout entier naturel n :

$$(0,85)^n \geq 1 - 0,15n$$

8. Etablir par récurrence que si p est un nombre premier alors pour tout entier positif a, l'entier $a^p - a$ est divisible par p. En déduire le petit théorème de Fermat : Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

9. Montrer que pour tout entier positif n on a :
$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$$

10. Montrer que le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets vaut $\dfrac{n(n-3)}{2}$. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence, ou un calcul direct.

E. Problèmes

1. On cherche à mettre au point une méthode permettant de trouver rapidement le jour de la semaine correspondant à une date donnée $d = (j, m, a)$ avec j, m, a, numéros respectifs des jour, mois, année de cette date. On supposera a supérieur ou égal à 1900.

On rappelle qu'une année a est bissextile si a est divisible par 4 et non par 100 ou si a est divisible par 400.

(a) On considère le jour numéro j du mois numéro m d'une année non bissextile. Donner une formule indiquant le numéro d'ordre du jour considéré au sein de cette année en fonction du couple (j, m).

(b) Déterminer le nombre d'années bissextiles situées après l'année 1900 et avant l'année a.

(c) Le 1er janvier 1900 était un lundi. Trouver une formule indiquant quel est le jour de semaine correspondant à la date $d = (j, m, a)$ sachant que a n'est pas bissextile.

(d) Corriger la formule précédente dans le cas où l'année a est bissextile .

(e) Question subsidiaire : adapter cette démarche pour calculer votre age en jours.

2. Un triplet d'entiers non nuls sera dit 'de Pythagore' s'il satisfait à l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$. Si de plus x et y sont premiers entre eux, on dira que le triplet est élémentaire.

On se propose de déterminer la forme générale de ces triplets.

(a) Propriétés préliminaires : a et b désignant deux entiers non nuls, montrer que : a divise b si et seulement si a^2 divise b^2. Si ab est un carré parfait et a premier avec b, alors a et b sont des carrés parfaits.

(b) Montrer que tout triplet de Pythagore peut être transformé simplement en un triplet élémentaire. (suggestion : utiliser le pgcd).

(c) Soit un triplet élémentaire.

i. Démontrer que x et y sont de parité différente.

ii. On suppose alors x impair et y pair. En utilisant la factorisation $y^2 = (z + x)(z - x)$ et les propriétés préliminaires, montrer qu'il existe deux entiers non nuls p et q tels que $x = p^2 - q^2$ et $y = 2pq$ et $z = p^2 + q^2$.

(d) Donner la forme générale des triplets élémentaires.

3. Un entier x est dit parfait s'il coïncide avec la somme de ses diviseurs distincts de lui-même, ou autrement dit si la somme $s(x)$ de tous ses diviseurs égale le double de x.

On se propose ici d'étudier la structure générale des nombres parfaits pairs.

(a) Soit n un entier strictement plus grand que 1 et p un nombre premier distinct de 2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de $x = p2^{n-1}$ puis la somme de tous ses diviseurs.

(b) Soit n un entier tel que $2^n - 1$ soit premier. Déduire de la question précédente que $x = (2^n - 1)2^{n-1}$ est un nombre parfait.

Réciproquement, soit x un nombre parfait pair.

(c) Montrer qu'il existe un entier strictement supérieur à 1, noté n, et un entier impair, noté p, tels que $x = p2^{n-1}$.

(d) Montrer que tout diviseur de x se décompose de manière unique en un produit du type $d2^q$ avec d diviseur de p et q entier au plus égal à $n - 1$. En déduire l'expression de la somme $s(x)$ des diviseurs de x en fonction de n et de la somme $s(p)$ des diviseurs de p.

(e) On pose $s(p) = p + 1 + a$. Montrer en utilisant ce qui précède que le fait d'être parfait pour x entraîne avec les notations précédentes la divisibilité de p par $a + 1$. Conclure alors que p est premier.

III. Mise en équations

Voici une série de problèmes faciles à résoudre, pour lesquels la difficulté principale est de mettre l'énoncé en équations.

1. **Le problème de l'hypocondriaque.** J'ai toujours mal quelque part ! Un jour sur trois, j'ai mal au dos ! Un jour sur quatre, j'ai mal aux dents ! Un jour sur cinq, j'ai la migraine ! Et même, un jour sur six, je souffre de deux de ces maux ! Mais, le pire, c'est les

jours maudits, où j'ai mal au dos, aux dents, et à la tête... Au fait, quelle est leur fréquence ?

2. **L'âge de Diophante.** Une épigramme grecque, publiée vers 369 dans L'Abrégé de l'Histoire Romaine d'Eutrope, propose de calculer l'âge de Diophante. Voici la traduction en alexandrins qu'en donne Emile Fourrey dans ses Récréations mathématiques.

Passant sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaî tre à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance ;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des septs parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

Saurez-vous calculer l'âge de Diophante ?

3. **Les océans.** L'océan Atlantique fait la moitié du Pacifique. L'Arctique fait le quart de l'Atlantique. L'Arctique et l'Antarctique font ensemble les deux cinquièmes de l'océan Indien, qui fait lui-même fait les neuf dixièmes de l'Atlantique. Mais alors, combien faut-il d'océans Antartique pour recouvrir tout le Pacifique ?

4. **L'âge de Timothée.** Quand Timothée aura l'âge qu'a maintenant son père, alors sa soeur sera deux fois plus vieille. D'autre part, l'âge du père sera le double de l'âge de Timothée quand sa soeur aura l'âge actuel de son père. En outre, la somme de leurs âges est d'un siècle. Mais quel âge a chacun ?

5. **L'élection présidentielle.** A l'élection présidentielle, chaque candidat a la moitié des voix du candidat qui le précède. Y aura-t-il un deuxième tour ?

IV. Moyennes

A. Ces moyennes ne sont pas de pures abstractions

Voici quatre exercices pour lesquels il convient de réfléchir à la formulation des énoncés.

1. Une automobile parcourt 100 km à la vitesse de $x = 90$ km/h puis encore 100 km à la vitesse de $y = 70$ km/h. Quelle est la vitesse moyenne h sur l'ensemble du parcours ? De quelle moyenne s'agit-il (moyenne inventée par Hippase, élève de Pythagore, environ 500 avant notre ère) ?

2. Une automobile roule pendant une heure à la vitesse de $x = 90$ km/h puis encore une heure à la vitesse de $y = 70$ km/h. Quelle est la vitesse moyenne a sur l'ensemble du parcours ? De quelle moyenne s'agit-il ?

3. La population d'une ville était de $x = 200000$ habitants en 1994, elle est de $y = 220000$ habitants en 1996. Quelle était la population g en 1995 en supposant que le taux (c'est à dire le pourcentage annuel) d'accroissement moyen est constant. De quelle moyenne s'agit-il ?

4. Les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent $x = 3$ cm et $y = 4$ cm. Quelle est la longueur q du côté du triangle rectangle et isocèle de même hypoténuse ? On parle dans ce cas de moyenne quadratique.

B. Exercices

1. Une auto a parcouru la distance qui sépare deux ville à la vitesse de 40 kilomètres par heure. Elle a effectué le trajet retour à la vitesse de 60 kilomètres par heure. Quelle était sa vitesse moyenne ?

2. Lors d'une compétition motocycliste, trois coureurs ont pris le départ en même temps. Le second coureur, qui faisait 15 km/h de moins que le premier et 3 km/h de plus que le troisième, a franchi la ligne d'arrivée 12 minutes plus tard que le premier et 3 minutes avant le troisième. On demande
   a. la longueur du parcours
   b. la vitesse de chaque motocycliste
   c. le temps mis par chacun pour effectuer le parcours.

3. Dans une classe de 35 élèves, au dernier devoir de philosophie, les filles ont eu une moyenne de 12 et les garçons une moyenne de 9,5. La moyenne générale à ce devoir est de 10,5. Combien y a t il de filles et de garçons dans cette classe ?

4. Dans un restaurant, des étudiants décident de partager l'addition en payant tous la même somme. Le camarade chargé de partager l'addition se perd dans les divisions. Dans une première tentative, chaque personne donne 10 Euro, il manque alors 37,5 Euro. Dans une deuxième tentative, elles donnent chacune 13 Euro, il y a alors 7,5 Euro en trop. Quelle prix doit payer chaque étudiant ?

5. Toutes les heures sont données en heures locales. Le 8 mai, un avion quitte Paris à 10h20 pour atteindre New Delhi à 22h50. Le 14 mai, un avion quitte New Delhi à 0h35 pour atteindre Paris à 6h05. On suppose

que la durée du vol est la même à l'aller et au retour. Quelle heure est-il à New Delhi lorsqu'il est 17 heures à Paris ?

6. Je voyage en automobile, je roule à 60 kilomètres par heure, et j'arrive à 13 heures. Si j'avais roulé à 80 kilomètres par heure, je serais arrivé à 11 heures. Quelle distance ai-je parcouru ? En combien de temps ?

V. Nombres décimaux, rationnels

A. Exercices

1. Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?
$a = 1/3$, $b = 1/15$, $c = 1/25$, $d = 1/125$, e,
$f = 0,333\cdots 3\cdots$, $g = \sqrt{2}$,
$h = 0{,}123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\cdots$,
$i = 0{,}123\,456\,789\,101\,112\,131\,4\cdots$,
$j = \pi$, $k = 13/7$, $l = 27/17$.

2. Mettre les rationnels suivants sous forme de fraction irréductible.
a. $\frac{175}{245}$, $\frac{60}{65}$, $\frac{10}{35} - \frac{3}{14}$, $\frac{595}{296}$
b. $\frac{7}{30} + \frac{2}{45} + \frac{45}{50}$, $\frac{37}{90} - \frac{11}{60}$, $\frac{26}{45} : \frac{29}{30}$,

3. Peut on trouver une écriture fractionnaire du nombre $A = 48/36$ telle que
a. Le dénominateur soit égal à 21
b. Le dénominateur soit égal à 353
c. Le numérateur soit multiple de 5
d. Le dénominateur et le numérateur aient 22 pour pgcd.

4. Monsieur Martin réunit tous ses petits-enfants et leur dit : Je vais distribuer 8 750 Euro à l'ensemble des garçons et 6 250 Euro à l'ensemble des filles. Mais, ne vous inquiétez pas, vous aurez tous la même somme d'argent. Sachant que Monsieur Martin a donné à chacun la plus grande somme possible, calculer cette somme. En déduire le nombre de garçons et de filles ?

5. Deux voitures font des tours sur un circuit fermé ; elles partent toutes les deux à midi de la ligne de départ. L'une parcourt le circuit en 30 minutes, l'autre en 36 minutes. A quelle heure les deux voitures repasseront-elles en même temps la ligne de départ ? Combien auront elles fait de tours ?

6. Pour carreler le sol d'une pièce rectangulaire, on dispose de carreaux carrés de quatre dimension possibles : 12 cm de côté ; 15 cm de côté ; 20 cm de côté ; 30 cm de côté . Le travail est d'autant plus facile et rapide que les carreaux sont de grande dimension. Quelle taille de carreaux faut-il prendre si l'on ne veut casser aucun carreau sachant que les dimensions de la pièce sont 4,40 m sur 4,20 m.

7. Circulant à vitesse régulière sur son circuit habituel, un bus passe à l arrêt A à 8 h, à 10 h 30 et aussi à 12 h 10.
a. Calculer la durée possible d un tour de circuit.
b. Son trajet a une longueur égale à 10 km. Sa vitesse moyenne est comprise entre 20 km/h et 25 km/h. Déterminer la durée d un tour et la vitesse moyenne du bus.

8. Un catalogue de vente de laine fait une publicité pour inciter à acheter des lots de 15 pelotes :
"Economisez 20 % par pelote si vous achetez par lots de 15 pelotes : la pelote 7,20 F au lieu de 9 F !"
a. Les prix annoncés correspondent-ils à une réduction de 20 % ?
b. Une cliente, n'ayant besoin que de 14 pelotes, pense en commander 15 pour profiter de la réduction. Quelle est, en pourcentage du prix normal de 14 pelotes, l'économie réalisée par cette cliente ?
c. Un commerçant achète plusieurs lots de 15 pelotes qu'il revend 9 F l'unité. Exprimer son bénéfice en pourcentage du prix d'achat.

9. On clôture un terrain rectangulaire de 330 m de périmètre par un triple rang de fil de fer soutenu par des piquets. Les piquets sont équidistants, leur distance étant comprise entre 1,50m et 1,75m, et il y a un piquet dans chaque coin.
a. Sachant que la longueur du terrain surpasse sa largeur de 13,20 m, déterminer la distance entre deux piquets.
b. Un piquet étant vendu 1,25 Euro, et le fil de fer 9,50 Euro les 100 m, calculer le prix de cette clôture.

10. Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$$x = 3,\overline{14}\ , \qquad x = 0,\overline{9}\ , \qquad x = 3,14\overline{9}\ ,$$

la période étant le nombre surligné.

11. (a) Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots 1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit $M = 0,\overline{1997}$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.

(c) Même question avec :

$P = 0,\overline{1} + 0,\overline{2} + 0,\overline{3} + 0,\overline{4} + 0,\overline{5} + 0,\overline{6} + 0,\overline{7} + 0,\overline{8} + 0,\overline{9}$

B. $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel*

a. Démontrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair. Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair. En déduire que si le carré d'un entier naturel est un nombre pair, alors cet entier naturel est lui-même un nombre pair.

b. On se propose de démontrer (par l'absurde) que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, et l'on note p/q son écriture fractionnaire irréductible : $\sqrt{2} = p/q$, où p et q sont des entiers naturels premiers entre eux. Montrer que p^2 est un nombre pair, et en déduire que p est un nombre pair. Montrer alors que q^2 est un nombre pair, et en déduire que q est un nombre pair. Conclure.

C. $\sqrt{3}$ *non plus*

a. Démontrer que le carré d'un multiple de 3 est un multiple de 3. Démontrer que si un entier naturel n'est pas un multiple de 3, alors son carré n'est pas un multiple de 3. En déduire que si le carré d'un entier naturel est un multiple de 3, alors cet entier naturel est lui-même un multiple de 3.

b. En s'inspirant de la démarche décrite pour le nombre $\sqrt{2}$, démontrer (par l'absurde) que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

D. Un procédé géométrique d'approximation de $\sqrt{2}$

Dans le plan xOy, on porte sur Ox une suite de points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ et sur Oy une suite de points $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, construites de la manière suivante : $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, et $a_n b_n = 2$ (le rectangle de côtés a_n et b_n a pour aire 2).

1. Représentez cette suite de rectangles de côtés a_n et b_n.

2. Démontrez successivement que : $\forall n,\ b_n < a_n$; $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ; $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante.

3. Calculez $a_n - b_n$ en fonction de $a_{n-1} - b_{n-1}$ et a_n. Montrez que l'on a l'inégalité :

$$a_n - b_n < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}.$$

4. Calculez les premiers termes de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtenez-vous à chaque pas ? Utilisez l'inégalité précédente pour montrer que le nombre de décimales exactes obtenues double grosso modo à chaque pas.

E. Nombres pentimaux

a. En base 10, certaines des écritures fractionnaires suivantes

$$\frac{7}{5}\,;\ \frac{2}{6}\,;\ \frac{7}{8}\,;\ \frac{47}{125}\,;\ \frac{42}{30}\,;\ \frac{15}{7}$$

représentent des nombres décimaux. Les autres représentent des nombres rationnels non décimaux. Ecrire ces nombres décimaux sous forme de fractions décimales, et donner pour les autres une valeur approchée par excès au 1/100 près.

b. Un nombre est dit *pentimal* s'il possède une écriture fractionnaire dont le dénominateur est une puissance de 5. Parmi les nombres du **a.**, quels sont ceux qui sont pentimaux ? Donner pour chacun de ces nombres une écriture fractionnaire irréductible en base cinq (on écrira les nombres en base cinq suivant le modèle suivant : huit sera écrit $(13)_5$).

c. On considère les nombres de la forme

$$a \times 5 + b + \frac{c}{5} + \frac{d}{5^2} + \frac{e}{5^3}\ ,$$

pour lesquels a, b, c, d, e sont des entiers naturels de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. On décide de représenter un tel nombre par l'écriture $(ab, cde)_5$, qu'on appellera *écriture pentimale* du nombre.

i) Trouver la fraction décimale représentant le même nombre que $(0, 342)_5$.

ii) Trouver l'écriture pentimale du nombre décimal 7,672.

d. Montrer que tout nombre pentimal est un nombre décimal. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

F. Vers la division à virgule

On considère le rationnel dont l'écriture à virgule est $r = 2, \overline{370}$, la période étant 370.

a. Ecrire ce rationnel sous la forme d'un rapport de deux entiers premiers entre eux.

b. La division Euclidienne de 64 par 27 permet d'écrire l'égalité

$$\frac{64}{27} = 2 + \frac{10}{27}$$

i) Effectuer la division Euclidienne de 100 par 27. En déduire l'égalité

$$\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{19}{27}\right)$$

et en déduire le chiffre des dixièmes de l'écriture à virgule de 64/27.

ii) Réitérer la procédure pour trouver le chiffre des centièmes et le chiffre des millièmes de 64/27.

iii) Retrouver en utilisant ces calculs : pourquoi l'écriture décimale de 64/27 est périodique et infinie; pourquoi on obtient par ce procédé un seul chiffre à chaque quotient.

c. Utiliser l'égalité précédente pour donner une valeur exacte de l'erreur commise en remplaçant 64/27 par l'écriture décimale 2,3. Quelle serait l'erreur commise en choisissant comme valeur approchée 2,4? pourquoi cette erreur est-elle inférieure à un dizième?

G. Développement en fraction continue d'un nombre rationnel

1. Expliquer, à partir des exemples fournis, comment l'algorithme d'Euclide appliqué à deux entiers $r_0 \in \mathbb{Z}$ et $r_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, permet d'obtenir un développement en fraction continue du nombre rationnel $R = \dfrac{r_0}{r_1}$ sous la forme :

$$R = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \qquad (*)$$

Par souci de simplification on note cette fraction continue $R = [a_0; a_1, a_2, \cdots a_n]$.
Pour le nombre rationnel R que vaut a_0?
La suite des nombres $a_1, a_2, \cdots a_n$ est formée d'entiers positifs appelés les quotients partiels associés à la fraction continue $(*)$. Vérifier sur les exemples et expliquer pourquoi le dernier quotient partiel a_n (obtenu par l'algorithme d'Euclide) est toujours supérieur ou égal à 2.

Exemples :
$(r_0, r_1) = (233, 177)$; $(r_0, r_1) = (56, 177)$;
$(r_0, r_1) = (121, 177)$; $(r_0, r_1) = (1572, 1812)$;
$(r_0, r_1) = (131, 151)$; $(r_0, r_1) = (20, 171)$;
$(r_0, r_1) = (-10, 2)$; $(r_0, r_1) = (-3, 2)$;
$(r_0, r_1) = (-56, 177)$; $(r_0, r_1) = (-131, 171)$.

2. Si $R = [a_0; a_1, a_2, \cdots a_n]$, alors pour tout entier $0 \leq k \leq n$ on note $\dfrac{P_k}{Q_k}$ la fraction intermédiaire définie par

$$\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \cdots a_k] \ ;$$

ainsi, $P_0 = a_0, Q_0 = 1$ $P_1 = a_0 a_1 + 1, Q_1 = a_1$ $P_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2, Q_1 = a_1 a_2 + 1$ $\cdots$ Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a :

$$P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2} \quad , \quad Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad (**)$$

Ces fractions intermédiaires sont appelés les convergents (ou les réduites) d'ordre k associé(e)s au nombre R.
Vérifier que si on pose $P_{-1} = 1$ et $Q_{-1} = 0$ alors $(**)$ reste valable pour $k = 1$.

3. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ on a :

$$Q_k P_{k-1} - P_k Q_{k-1} = (-1)^k$$

en déduire que les réduites d'ordre $k \geq 1$ sont des fractions irréductibles qui vérifient :

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$$

VI. Nombres réels, équations, inéquations

A. Racines carrées, équations, inéquations

1. Pour chacun des nombres suivants calculer leur racine carrée, leur carré et leur puissance cinquième : $(-13)^6, (-13)^5, 13^6$

2. Simplifier l'expression suivante : $\sqrt{18} + 2\sqrt{8} - \sqrt{50}$

3. Calculer $(\sqrt{2}+1)^2$, $(\sqrt{2}-1)^2$, $(1-\sqrt{2})^2$, en déduire $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

4. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$14x^2 - 15x = 0$; $(4x+3)(x+1) = (2x+2)(3x-4)$;
$\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{-3x+4}{10}$; $\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x(x+3)}$.

5. Caractériser la région du plan (x, y) définie par le système d'inéquations

$$\begin{cases} 5x + 3y & \geq & 0 \\ 3x - 2y & \geq & 0 \\ x & \leq & 3 \end{cases}$$

6. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left| \frac{x-1}{x+2} \right| \leq 2 \ .$$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$x^2 + x - 6 \geq 0 \ ; \quad x^3 - 4x \leq 0 \ ; \quad x^2 + x + 1 < 0 \ .$$

B. Une autre approximation de $\sqrt{2}$

1. Vérifier que $\sqrt{2}-1$ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2+x} .$$

2. Représenter graphiquement la fonction $f : x \in [0,1] \to 1/(2+x)$.

3. Vérifier que l'on définit une suite de réels par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Ces réels sont-ils rationnels ?

4. Marquer sur le graphique les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

5. Montrer que pour tout n, on a l'égalité

$$\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)} \left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| ,$$

et en déduire que

$$\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4} \left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| ,$$

puis que

$$\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| \leq 4^{-n} .$$

6. Conclure.

7. Question subsidiaire : montrer que la suite $\{u_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ est croissante, et que $\{u_{2n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ est décroissante.

C. Développement en fraction continue d'un nombre réel

Dans ce qui suit, on notera $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1. Tracer le graphe de la fonction T définie sur $]0,1]$ par :

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère le processus de calcul suivant :

Etape 1 : Calculer $x_1 = x_0 - \lfloor x_0 \rfloor$,
Etape 2 : Si $x_1 \neq 0$ calculer $T(x_1)$, poser $x_2 = T(x_1)$
Etape 3 : Si $x_2 \neq 0$ calculer $T(x_2)$, poser $x_3 = T(x_2)$
...

Ce procédé s'arrête donc dès que l'on génère une valeur x_n nulle.

a. Si x_0 est rationnel, que produit-on avec ce processus ?

b. Montrer que si ce processus s'arrête alors x_0 est un rationnel.

c. En déduire que si x_0 est irrationnel alors il existe une suite (x_n) de réels et une suite (a_n) d'entiers tels que pour tout entier $n \geq 1$

$$x_0 = \frac{P_{n-1} + x_n.P_{n-2}}{Q_{n-1} + x_n.Q_{n-2}}$$

où l'on convient de poser $P_{-1} = 1$ et $Q_{-1} = 0$ et pour tout entier $k \geq 0$:

$$\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \cdots a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

Dans la suite on supposera que x_0 est un nombre irrationnel.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\left|x_0 - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{Q_{n-1}^2} .$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $Q_n \geq 2^{(n-1)/2}$.

5. En déduire que la suite des réduites $(\frac{P_n}{Q_n})$ converge vers x_0. L'expression $[a_0; a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots]$ est le développement en fraction continue de x_0.

6. Donner le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

7. En utilisant les développements en fraction continue, le mathématicien suisse Johann Lambert a donné en 1761 la première démonstration de l'irrationnalité de e et de π. Il a prouvé le résultat général suivant : si x est un nombre rationnel non nul alors $\tan(x)$ est un nombre irrationnel . Indiquer comment ce résultat permet de prouver l'irrationnalité de π. Sa réciproque est-elle vraie ?

D. Suites de Fibonacci et le nombre d'or

Sur une île déserte vit à l'année zéro un couple de lapins. Chaque année, les couples de lapins âgés d'au moins deux ans se reproduisent et engendrent un nouveau couple de lapins. Ainsi, l'année zéro il y a un couple, l'année un 1 couple aussi, l'année deux 2 couples (le premier s'étant reproduit), l'année trois 3 couples (encore le premier couple), l'année quatre 5 couples (les deux premiers couples s'étant reproduits) et ainsi de suite. On note F_n le nombre de couples l'année n. La suite F_n est très connue sous le nom de suite de Fibonacci (du nom de Leonardo de Pise, fils de Bonacci).

1. Donner une formule simple permettant d'exprimer F_n par récurrence à partir de F_{n-1} et F_{n-2}.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation

$$F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n \ .$$

3. On considère le nombre d'or

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ .$$

Montrer que le nombre d'or vérifie l'identité

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \ .$$

En déduire que ϕ est irrationnel. Calculer $\varphi = -\phi^{-1}$.

4. On considère

$$G_n = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}} \ .$$

Montrer que

$$F_n = G_{n-1} \ .$$

5. En déduire que

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \longrightarrow \phi \quad \text{quand } n \to \infty \ ,$$

et commenter au sujet de la croissance de la population.

VII. Nombres complexes et trigonométrie

A. Simplifications

1. Soient m, n deux entiers. Utiliser la formule d'Euler pour linéariser des expressions de la forme $\cos^n(x)\sin^m(x)$ (c'est à dire les exprimer sous une forme faisant intervenir des sinus et cosinus d'arcs multiples de x, au lieu de puissances de sinus et cosinus). Application : linéariser

$$\cos^2(x) \qquad \text{et} \qquad \sin^5(x) \ .$$

2. Soient m, n deux entiers. Utiliser la formule de Moivre pour exprimer $\cos(mx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Applications :

$$\cos(5x) \qquad \text{et} \qquad \sin(5x) \ .$$

3. Mettre sous forme polaire et positionner dans le plan complexe les nombres complexes suivants

$$2+3i \ ; \quad 2-3i \ ; \quad (2+3i)(5-2i) \ ; \quad \frac{2+3i}{5-2i} \ ; \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5 \ .$$

4. Que vaut la somme

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi n/N} \qquad ?$$

B. Racines, équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \ ; \quad 3x^2 - x + 5 = 0 \ ; \quad 2x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \ .$$

C. Nombres complexes et géométrie du plan

A un point de coordonnées (x, y) du plan on associe le nombre complexe

$$z = x + iy \ .$$

1. Identifier les transformations du plan associées aux transformations suivantes
   a. $z \longrightarrow z' = z + 1$
   b. $z \longrightarrow z' = w + k(z - w)$, où $k \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{C}$.
   c. $z \longrightarrow z' = w + e^{i\alpha}(z - w)$, où $\alpha \in [-\pi, \pi]$ et $w \in \mathbb{C}$.
2. Comment exprimer une translation de a dans la direction x suivie d'une rotation de 45 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'origine puis d'une homothétie de rapport 3 et de centre l'origine ?

VIII. QCM

1. L'écriture décimale du nombre $(1234)_5$ est
   a. 12345 **b.** 194
   c. 184 **d.** 193
   e. 185

2. L'écriture en base 3 du nombre 532 est
   a. $(201201)_3$ **b.** $(20121)_3$
   c. $(301301)_3$ **d.** $(200102)_3$
   e. $(102102)_3$

3. $(34)_5 + (23)_5$ vaut
   a. $(211)_5$ **b.** $(12)_5$
   c. $(112)_5$ **d.** $(115)_5$
   e. 32

4. $(34)_5 \times (23)_5$ vaut
   a. $(1311)_5$ **b.** $(1111)_5$
   c. $(1442)_5$ **d.** $(144)_5$
   e. $(2332)_5$

5. Le système hexadécimal (base seize) utilise les seize symboles $0, 1, \ldots 9, A, B, C, D, E, F$. L'expression $(30AF0)_{16}$ vaut dans le système décimal
   a. 199 418 **b.** 943
   c. 12 463 **d.** 199 408
   e. 10 088

6. Quelle est l'écriture hexadécimale du nombre 73 810 ?
   a. $(11052)_{16}$ **b.** $(12052)_{16}$
   c. $(220122)_8$ **d.** $(1CD5)_{16}$
   e. $(EE2)_{16}$

7. Quelle est l'écriture hexadécimale du carré de $(FF)_{16}$?
   a. $(FFFF)_{16}$ **b.** $(FF00)_{16}$
   c. $(FE01)_{16}$ **d.** $(1CD5)_{16}$
   e. $(65025)_{16}$

8. Deux montres sont mises à l'heure simultanément le 1er novembre à 12 h 00. La première retarde de 2 mn 30 s par jour et la deuxième avance de 4 mn 15 s par jour. Quel sera l'écart entre les indications des deux montres le 14 novembre à 20 h 00 ?
   a. 0 h 00 min 00 s **b.** 0 h 23 min 20 s
   c. 1 h 29 min 06 s **d.** 1 h 30 min 00 s
   e. 1 h 36 min 45 s

9. On considère deux entiers à trois chiffres, tels que les chiffres figurant dans l'écriture de l'un figurent également dans l'écriture de l'autre. Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont vraies ?
   a. si leur différence est un multiple de 9, alors l'un des deux nombres est un multiple de 9
   b. si l'un des deux nombres est un multiple de 9, alors leur différence est un multiple de 9
   c. leur différence est un multiple de 9
   d. on ne peut pas savoir si leur différence est un multiple de 9, cela dépend des nombres considérés
   e. si l'un des deux nombres est un multiple de 6, alors leur différence est un multiple de 6

10. Quel est le nombre de chiffres de l'entier $2^9 \times 5^8$?
   a. 7 **b.** 8
   c. 9 **d.** 10

11. Il y a 25 ans, on a envoyé de la terre un puissant signal électromagnétique voyageant à la vitesse de la lumière en direction des 300 000 étoiles du Grand Amas d'Hercule. On pense que le Grand Amas d'Hercule est situé à au moins 25 000 années-lumières de la terre. Quelle est la durée minimale prévue pour le voyage de ce signal ?
   a. 750 ans **b.** 1 000 ans
   c. 7 500 ans **d.** 25 000 ans

12. On estime l'âge de la terre à environ 4,5 milliards d'années. L'homme serait apparu sur la terre il y a 3 millions d'années seulement. Si on représente la succession des évènements de l'histoire de la terre par une année (le premier janvier à 0 h 00 représente le début de la terre, il y a 4,5 milliards d'années, et le 31 décembre à minuit l'époque actuelle, l'apparition de l'homme se situe le
   a. 12 septembre **b.** 18 novembre
   c. 25 décembre à minuit **d.** 31 décembre à 18 h 10
   e. 31 décembre à 23 h 45

13. Soit n le nombre *huit milliards vingt sept mille.* Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?
   a. n s'écrit avec six zéros
   b. n est compris entre 10^9 et 10^{10}
   c. le quotient entier de n par 100 000 est 8 000.
   d. le produit de n par 10 000 s'écrit avec 13 chiffres.

14. Parmi les additions suivantes, quelles sont celles qui sont des opérations dans le système binaire ?
   a. $100 + 001 = 101$ **b.** $101 + 011 = 111$
   c. $101 + 010 = 111$ **d.** $101 + 011 = 1000$

15. La figure I.1 représente la synthèse “additive” des couleurs correspondant au mélange de couleurs émises par des sources de couleur bleue, rouge ou verte de même intensité. On code par 001 le rouge, 010 le vert et 100 le bleu. On construit une “opération”, notée “+”, qui traduit “l'additivité” des couleurs : par exemple : 100+001=101 (bleu+rouge=magenta).

Attention : on a bien 1+0=1 et 0+0=0, mais on conviendra que 1+1=1.

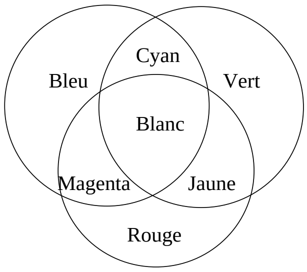


Figure I.1

La figure I.1 peut se traduire par

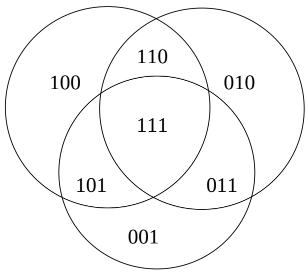


Schéma A

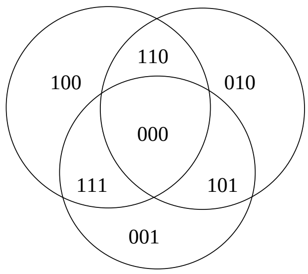


Schéma B

a. le schéma A **b.** le schéma B
c. aucun schéma

16. On mélange deux rayons lumineux de même intensité, l'un rouge et l'autre vert. Quelle sera la couleur de la lumière ?
a. blanche **b.** jaune
c. magenta

17. Lorsqu'un rayon lumineux frappe une surface d'encre, cette surface absorbe certaines couleurs qui composent ce rayon et réfléchit les autres (couleurs de ce rayon), c'est à dire celles que l'on voit, en l'occurrence la couleur de l'encre qui colorie la surface.

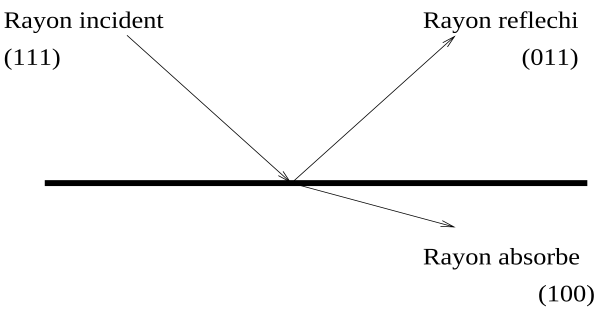


Figure I.2

La figure I.2 représente
a. une table vue blanche éclairée par une lumière jaune
b. une table vue jaune éclairée par une lumière blanche
c. une table vue blanche qui absorbe une lumière verte
d. une table vue jaune qui absorbe une lumière rouge

18. On peint une table avec un mélange d'encre verte et d'encre rouge, dans les mêmes proportions, et parfaitement absorbantes.
Quelle sera la couleur de cette table éclairée par une lumière blanche ?
a. cyan **b.** bleue
c. blanche **d.** noire
e. jaune

19. Je suis parti à 8 h 34 min. J'ai marché 1 h 37 min. Je me suis reposé 9 min. J'ai marché ensuite 1 h 45 min. A quelle heure suis-je arrivé ?
a. 12 h **b.** 11 h 45
c. 12 h 05 **d.** 11 h 55
e. 12 h 10

20. Un groupe de 80 touristes est réparti en deux cars. Dans le premier car, qui contient 30 personnes, la moyenne d'age est de 54 ans. Dans le second, la moyenne est 60 ans. Quel est l'age moyen du groupe ?
a. 57 ans **b.** 57 ans 9 mois
c. 58 ans **d.** 59 ans 6 mois
e. 57 ans 6 mois

21. Un nombre entier contient 2 468 centaines de milliers. Son chiffre des unités est la moitié de son chiffre des millions, son chiffre des milliers est la moitié de son chiffre des centaines de milliers, son écriture contient trois zéros. Parmi les propositions suivantes, dire lesquelles sont vraies
a. ce nombre est compris entre 20 et 30 millions
b. ce nombre est supérieur à 100 millions
c. son nombre de milliers est supérieur à 200 000
d. son chiffre des dizaines de millions est 2

22. Un boulanger place des petits pains sur une plaque. Il y a entre 100 et 200 petits pains. Il fait des rangées de 6 mais il lui reste toujours un petit pain de trop. Il fait des rangées de 5 mais il lui reste toujours un petit pain de trop. Il fait des rangées de 4 mais il lui reste toujours un petit pain de trop.
a. Il y a 120 petits pains.
b. Il y a 121 petits pains.
c. Il y a 179 petits pains.
d. Il y a 121 ou 181 petits pains.
e. On ne peut pas dire sans essayer toutes les possibilités combien il y a de petits pains.

23. Le robinet de droite remplit le réservoir en 12 minutes et le robinet de gauche en 15 minutes. Si l'on

ouvre les deux robinets ensemble, il faudra pour remplir le réservoir

a. 27 minutes. **b.** 3 minutes.
c. 6 minutes et 40 secondes.
d. 9 minutes et 30 secondes.
e. 13,5 minutes.

24. Douze élèves entrent dans une salle comportant 24 chaises. De combien de manières peuvent-ils se disposer (aucun d'entre eux ne doit s'asseoir sur les genoux d'un autre et tous doivent s'asseoir) ?

a. De 2 manières différentes.
b. De 2412 manières différentes.
c. De 1224 manières différentes.
d. De $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$ manières différentes
e. De $24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13$ manières différentes.

25. *"Il m'aime , un peu (on arrache un pétale), beaucoup (on arrache un pétale), passionnément (on arrache un pétale), à la folie (on arrache un pétale), pas du tout (on arrache un pétale), il m'aime, un peu (on arrache un pétale) .... etc."*. En effeuillant une marguerite de 71 pétales, il m'aime

a. Un peu **b.** Beaucoup
c. Passionnément **d.** A la folie
e. Pas du tout

26. Dans le calcul suivant, les étoiles remplacent les chiffres

$$\begin{array}{cccc|cc} * & * & * & * & 4 & 8 \\ \cline{5-6} & * & * & * & 3 & 6 \\ & & * & 9 & & \end{array}$$

Combien de dividendes différents peut-on obtenir en retrouvant les chiffres effacés ?

a. 1 **b.** 2
c. 3 **d.** 4

27. La division Euclidienne de 35 537 par 345 a pour quotient q et pour reste r

a. $q + r = 105$ **b.** $q + r = 103$
c. $q + r = 101$ **d.** $q + r = 15$

28. Parmi les propositions suivantes, indiquer celles sont vraies

a. si un nombre est pair et est un multiple de 6, alors il est divisible par 12
b. si un nombre est multiple de 24, alors il est divisible par 2, par 3, par 4, par 8, par 16 et par 24
c. pour qu'un nombre soit multiple de 45, il faut et il suffit qu'il soit multiple de 3 et de 15
d. si un nombre est à la fois multiple de 3, de 4 et de 5, alors il est multiple de 12, de 15, de 20 et de 60.

29. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont divisibles par 3 ?

a. 385 **b.** 4995
c. 35619 **d.** 1433
e. 1113

30. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont divisibles par 11 ?

a. 3443 **b.** 12345
c. 400422 **d.** 1433
e. 11113

31. Le tiers de 3^{27} est égal à

a. 3^9 **b.** 3^{14} **c.** 3^{15}
d. 1^{27} **e.** 3^{26}

32. Je suis un nombre entier. Lorsqu'on additionne tous mes diviseurs positifs, on trouve mon double. Parmi ces nombres, quel(s) est (sont) celui (ceux) pour qui l'affirmation est vraie ?

a. 6 **b.** 12 **c.** 24
d. 28 **e.** 36

33. En effectuant la division Euclidienne de a par 13, on trouve un quotient égal au reste. La plus grande valeur possible pour a est

a. 156 **b.** 157
c. 168 **d.** 169

34. Soient $a = 2^{(3^4)}$, $b = 3^{(2^4)}$ et $c = 4^{(2^3)}$,

a. $a = b = c$ **b.** $a < b < c$
c. $b < a < c$ **d.** $c < b < a$
e. $c < a < b$

35. Un problème de Nicolas Chuquet (1445-1500) :
Une femme portoit oeufs vendre au marché. En allant survint ung homme qui lui fist tomber ses oeufs dont il fut contraint à les payer. Mais cette femme ne sçavait le compte de ses oeufs, fors que quant elle comptoit 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, 5 a 5 et 6 a 6 toujours lui en demeuroit 1. En quant elle les comptoit par septaines c'est assavoir 7 a 7, il ne luy demeuroit riens.
Assavoir moult quantz oeufs pouvoit avoir cette femme.
Le nombre d'oeufs que portait cette femme était

a. $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ **b.** 61
c. 301 **d.** 847

36. Quel est le nombre divisible par 18 ?
a. 27 **b.** 2 034 **c.** 2 890
d. 4 018 **e.** 81

37. Combien de zéros contient l'écriture de l'entier $3 \times 2^4 \times 5^6 \times 10^2$?
a. 3 **b.** 4 **c.** 5 **d.** 6 **e.** 7

38. Quel est le chiffre des unités de 3^{13} ?
a. 1 **b.** 3 **c.** 7 **d.** 9 **e.** 5

39. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont premiers ?
a. 53 **b.** 143 **c.** 87 **d.** 43 **e.** 100

40. Le PGCD de 156 et 282 vaut
a. 9 **b.** 6 **c.** 7 **d.** 4 **e.** 8

41. Le PPCM de 156 et 282 vaut
a. 282 **b.** 991 **c.** 7332 **d.** 2744 **e.** 43992

42. Si p désigne le pgcd de 945 et de 711 et q désigne leur ppcm alors le couple (p, q) vaut :
a. (1,671895), **b.** (3,671895), **c.** (9,74655),
d. (3,74655), **e.** (1,223965), **f.** (3,223965)

43. Un coureur cycliste escalade le tourmalet à la vitesse de 30 km/h, puis le redescend (sur le même trajet) à la vitesse de 60 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?
a. 45km/h **b.** 50 km/h **c.** 90 km/h
d. 40 km/h **e.** 60 km/h **f.** 30 km/h

44. Le reste de la division Euclidienne de 4^{500} par 7 vaut
a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4 **e.** 5 **f.** 6

45. Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire lesquelles des propriétés suivantes sont vraies
a. Si a divise b et b divise c, alors a divise c
b. Si a divise b et c, alors a divise $2b + 3c$.
c. S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = 4$ alors $pgcd(a, b) = 4$
d. Si $7a - 9b = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

46. Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire lesquelles des propriétés suivantes sont vraies
a. Si a divise b et b divise c et c divise a, alors $|a| = |b|$.
b. "a et b premiers entre eux" équivaut à $ppcm(a, b) = |ab|$".
c. Si a divise c et b divise d, alors ab divise cd.
d. Si 9 divise ab mais pas a, alors 9 divise b.

47. Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire lesquelles des propriétés suivantes sont vraies
a. Si a divise b ou a divise c, alors a divise bc.
b. "a divise b" équivaut à $ppcm(a, b) = |b|$".
c. Si a divise b, alors a n'est pas premier avec b.
d. Si a n'est pas premier avec b, alors a divise b ou b divise a.

48. Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire lesquelles des propriétés suivantes sont vraies
a. Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.
b. S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = d$ alors $pgcd(a, b) = |d|$.
c. Si a est premier avec b, alors a est premier avec b^3.
d. Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et c.
e. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
f. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.

49. Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire lesquelles des propriétés suivantes sont vraies
a. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
b. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.
c. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
d. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
e. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
f. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

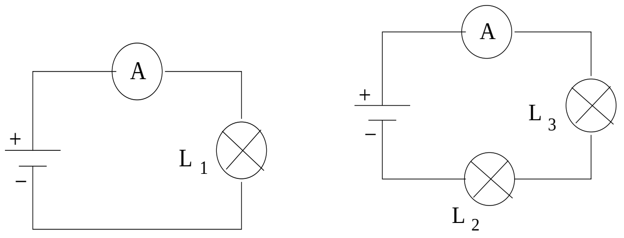
50. Deux nombres impairs consécutifs sont premiers entre eux
a. toujours **b.** parfois **c.** jamais

51. Le nombre 60 possède
a. 10 diviseurs **b.** 12 diviseurs
c. 14 diviseurs **d.** 16 diviseurs

52. On rappelle que la résistance moyenne du corps humain entre les mains et les pieds est de l'ordre de 2 500 Ohms et que, en courant alternatif, pour lequel la loi d'Ohm reste valable, l'intensité maximale supportable pendant moins de trente secondes, sans danger pour le corps humain, est de 10 mA (mA = milli-Ampère).
Dans une installation électrique, à partir de quelle tension minimale est-il dangereux de toucher simultanément un fil de phase (fil sous tension) et un fil de terre ?

a. 240 Volts **b.** 120 Volts **c.** 50 Volts
d. 25 Volts **e.** 12 Volts

53. Dans les deux circuits ci-après (Figure II.2), les deux générateurs sont identiques entre eux, ainsi que les deux ampèremètres A et toutes les ampoules L_1, L_2 et L_3.



Circuit 1 Circuit 2

Sachant que les résistances en série s'ajoutent, on peut affirmer que
a. L_3 brille davantage que L_2
b. L_2 et L_3 brillent de la même façon
c. L_1, L_2 et L_3 brillent de la même façon
d. L'intensité du courant dans le circuit 2 est plus petite que celle du circuit 1

54. Une suite numérique est arithmétique si
a. chaque terme est le produit du précédent par une constante
b. chaque terme est la somme du précédent et d'une constante
c. Le rapport de deux termes successifs est constant
d. Le produit de deux termes successifs est constant

55. La suite u_n définie par $u_n = 2n + 3$ est
a. arithmétique de raison 2 **b.** géométrique
c. proportionnelle **d.** arithmétique de raison 3

56. Une suite numérique est géométrique si
a. chaque terme est la somme du précédent et d'une constante
b. La différence de deux termes successifs est constant
c. chaque terme est le produit du précédent et d'une constante
d. Le produit de deux termes successifs est constant

57. La suite v_n définie par $v_n = 3 \times 2^n$ est
a. arithmétique
b. quelconque
c. géométrique, de raison 2
d. géométrique, de raison 3

58. Une usine produit chaque mois 200 objets supplémentaires, depuis le mois de janvier 98. Quelle était sa production au mois de novembre 98 si sa production en janvier 99 était 3000 unités ?
a. 2800 **b.** 3200
c. 2600 **d.** 2400

59. Le plus grand nombre décimal inférieur à 1/7 (un septième) est
a. 0,7 **b.** 1,7
c. (1/7)-(1/10) **d.** 0,142857
e. ce nombre n'existe pas

60. Dans un département, il y a une voiture pour quatre habitants. Dans le département voisin, il y en a une pour douze habitants. Les deux départements sont également peuplés et forment une région. Il y a donc en moyenne dans cette région
a. une voiture pour 6 habitants
b. une voiture pour 8 habitants
c. deux voitures pour 16 habitants
d. deux voitures pour 12 habitants

61. A paris, les horaires d'autobus affichés aux arrêts n'indiquent pas les heures de passage, mais les intervalles de passage (un intervalle de passage de 10 minutes signifie qu'un bus passe toutes les 10 minutes). Si un arrêt est commun à deux lignes, la ligne A (intervalle 10 minutes) et la ligne B (intervalle 15 minutes), en supposant que les bus des deux lignes soient ponctuels, quel est le plus long délai d'attente entre deux bus quelconques ?
a. 6 minutes **b.** 7,5 minutes
c. 10 minutes **d.** 12,5 minutes
e. 15 minutes

62. Lesquels des nombres suivants sont des décimaux ?
a. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{400}$ **b.** 3×400 **c.** $\dfrac{3}{400}$
d. $\dfrac{400}{3}$ **e.** $\dfrac{1}{3 \times 400}$

63. $\dfrac{5}{6} > \dfrac{7}{9}$ car
a. $5 < 7$ **b.** $6 < 9$
c. $\dfrac{15}{18} > \dfrac{14}{18}$ **d.** $\dfrac{7}{6} > \dfrac{5}{9}$

64. Le produit de 90,5 par 45,3 vaut
a. 4 099,65 **b.** 3 650,15 **c.** 5 001,25
d. 500,125 **e.** 3 690,75

65. Soit le nombre $N = 283,704$. Quelle est la phrase vraie ?
a. Le chiffre des unités est 4

b. Le chiffre des dizaines est 7
c. Le nombre des dizaines est 28
d. Le chiffre des centièmes est 7
e. Le chiffre des centaines est 0

66. Le nombre $\dfrac{142,45}{2035}$ peut également s'écrire
a. 7 **b.** 0,007 **c.** 0,7
d. 77 **e.** 0,07

67. J'avais une somme d'argent. J'en ai dépense le cinquième pour un premier achat, puis les trois quarts du reste pour un second achat. Quelle fraction de la somme initiale me reste-t-il ?
a. $\dfrac{2}{5}$ **b.** $\dfrac{1}{4}$ **c.** $\dfrac{3}{5}$
d. $\dfrac{1}{5}$ **e.** $\dfrac{3}{20}$

68. Si on effectue $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}\right):\dfrac{2}{7}$ on obtient
a. $-\dfrac{7}{2}$ **b.** $\dfrac{35}{24}$ **c.** $\dfrac{10}{7}$
d. $\dfrac{7}{10}$ **e.** $\dfrac{14}{12}$

69. Chassez l'intrus
a. $2+3\times5-6$ **b.** 11 **c.** $5+4\times2-7$
d. $\dfrac{220}{20}$ **e.** $\dfrac{1,1}{0,1}$ **f.** $\dfrac{33}{8}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{10}{3}$

70. Quel est le résultat de l'opération $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}$
a. $0,5833$ **b.** $\dfrac{5}{12}$ **c.** $0,58$
d. $\dfrac{7}{12}$ **e.** $\dfrac{2}{3}$ **f.** $\dfrac{4}{3}$

71. Parmi les nombres suivants, il y a un intrus. Lequel ?
a. $\dfrac{2,012}{0,1}$ **b.** $20,12$
c. $20+\dfrac{12}{10}$ **d.** $20+0,1+\dfrac{2}{100}$
e. $0,02012\times1000$

72. Il y a 120 litres d'eau dans un bassin. Quand on enlève 18 litres, il est alors rempli aux deux tiers. Quelle est la contenance du bassin ?
a. 150 litres **b.** 151 litres
c. 152 litres **d.** 153 litres
e. 160 litres

73. **a.** Un spectacle a duré 3 heures et 25 minutes. Exprimer la mesure de cette durée, en prenant l'heure comme unité, sous forme d'une fraction irréductible. Ce nombre est-il un décimal ?
b. Une mesure de durée est exprimée sous la forme de n heures et p minutes ($0<p<60$). Pour quelles valeurs de n et de p la mesure en heures de cette même durée sera-t-elle exprimée par un nombre décimal ?

74. Parmi les nombres réels suivants, quel(s) est (sont) celui (ceux) qui est (sont) un (des) nombre(s) décimal (décimaux) ?
a. $1/3$ **b.** $\sqrt{2}$ **c.** $24/6$
d. 17 **e.** π **f.** $121/605$

75. Parmi les nombres suivants, quels sont les entiers, décimaux, rationnels, irrationnels ?
a. $16^3/4^4$ **b.** $\sqrt{324/36}$
c. $\sqrt{36/324}$ **d.** e^2
e. $5208/42$ **f.** $4^{1/2}$

76. Parmi les nombres suivants, quels sont les entiers, décimaux, rationnels, irrationnels ?
a. 2.345710972 **b.** $\ln(e^2)$
c. $\cos(\pi/3)$ **d.** $\log_2(1/2)$
e. $\sin(\pi/3)$ **f.** $\sin(\pi/4)$

77. On considère le nombre
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}\ ,$$
où n est un entier strictement positif. Ce nombre est il
a. réel **b.** rationnel
c. irrationnel **d.** décimal
e. entier **f.** nul

78. On considère le nombre
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{(-2)^n}\ ,$$
où n est un entier strictement positif. Ce nombre est il
a. réel **b.** rationnel
c. irrationnel **d.** décimal
e. entier **f.** nul

79. Parmi ces affirmations, signalez laquelle (lesquelles) est (sont) exacte(s)
a. La somme de deux nombres entiers est un nombre entier
b. La somme de deux nombres non-entiers est un nombre non-entier
c. Le quotient de deux nombres entiers est toujours un nombre entier
d. La racine carrée d'un nombre entier est toujours un nombre entier
e. La racine carrée d'un nombre décimal est parfois un nombre décimal.

80. On considère les quatre nombres $a = 3,14$; $b = \pi$; $c = 3,15$; $d = 22/7$. Quelle(s) est (sont) la (les) proposition(s) vraie(s)

a. deux de ces nombres sont égaux.

b. tous ces nombres sont des décimaux.

c. a et c sont des valeurs décimales approchées de b.

d. d est une valeur décimale approchée de b.

e. $a < b < c < d$.

81. Une laitue est vendue par un agriculteur au prix de 40 centimes d'Euro ; un premier intermédiaire prélève une marge de 20%, le transporteur prélève une marge de 30 %, et finalement une grande surface vend la salade en faisant un bénéfice de 50%. Quel est le prix de vente de la laitue (exprimé en centimes d'Euro) ?

a. 60 **b.** 40,9 **c.** 95,5
d. 80 **e.** 100 **f.** 93,6

82. La fraction continue

$$[2; 1, 3, 5, 2] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{2}}}}$$

correspond au rationnel

a. 2 **b.** 3 **c.** $\dfrac{2}{1352}$
d. $2 + \dfrac{35}{46}$ **e.** $\dfrac{46}{127}$ **f.** $\dfrac{127}{46}$

83. Après une baisse de 20%, un article est affiché au prix de 280 Euro. Quel était son prix initial ?

a. 336 Euro **b.** 300 Euro **c.** 350 Euro
d. 360 Euro **e.** 480 Euro **e.** 400 Euro

84. Un TGV met normalement 3h pour aller de Paris à Marseille. Par suite d'une rupture de caténaire, il doit diminuer sa vitesse de 40%. Sachant que la panne a aussi occasionné une attente supplémentaire de 20mn, combien de temps aura-t-il finalement mis pour relier Paris à Marseille ?

a. 4h40mn **b.** 4h25mn **c.** 3h25mn
d. 5h20mn **e.** 5h05mn **f.** 4h00

85. Combien y a-t-il de multiples communs à 216 et à 270 entre 15000 et 20000 ?

a. aucun **b.** 3 **c.** 18
d. 5 **e.** 6 **f.** plus de 10

86. L'expression $\sqrt{3}(1 + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$ est égale à :

a. $\sqrt{3} + 3\sqrt{18}$ **b.** $\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$
c. 10 **d.** $9 + \sqrt{3}$
e. $\sqrt{3} + \sqrt{3}$

87. Quelles sont les propositions vraies ?

a. $(3\sqrt{3\sqrt{3}})^2 = 81$

b. $(3(3\sqrt{3})^2) = 81$

c. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ est un nombre décimal

d. $(\sqrt{3} + 12)^2 - (2\sqrt{3})^2$ n'est pas un entier naturel

e. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sont inverses l'un de l'autre.

88. Le système entre d'équations $2x + 3y = 5$ et $4x + 6y = 10$ a pour solution :

a. Impossible

b. Un couple de nombres réels

c. Une infinité de solutions

d. On ne peut pas le dire avant

89. Le nombre $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^3}}}\right)^2$ vaut

a. $2^{3/4}$ **b.** $2^{4/3}$ **c.** 4
d. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ **d.** $\sqrt{\sqrt{8}}$

90. L'inéquation $8x - 7 > 3x + 8$ a pour solution :

a. $[3; \infty[$ **b.** $]3; \infty]$
c. $]3; \infty[$ **d.** $[3; \infty]$

91. Quand on multiplie les deux membres d'une inéquation du premier degré par une nombre strictement négatif....

a. On change le sens de l'inégalité

b. On ne peut pas le faire

c. Rien ne change

d. On obtient une inéquation équivalente

92. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 1$. Combien y a-t-il de nombres réels qui ont 3 pour image par f ?

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** je ne sais pas

93. Quelles sont les propriétés vraies parmi les quatre suivantes ?

a. Le carré d'un nombre réel est toujours supérieur (ou égal) à ce nombre.

b. L'inverse d'un nombre réel non nul est toujours inférieur (ou égal) à ce nombre.

c. Le triple d'un nombre réel est toujours supérieur (ou égal) à ce nombre.

d. La racine carrée d'un nombre réel positif est toujours inférieure (ou égale) à ce nombre.

e. Le carré d'un nombre réel négatif est toujours supérieur (ou égal) à ce nombre.

94. Parmi les trois affirmations suivantes, quelles sont les vraies ?

a. L'inéquation $2x \geq 6$ a pour ensemble de solutions $[3; +\infty[$.

b. L'inéquation $1/x < 2$ a pour ensemble de solutions $]-\infty;+\infty[$.

c. L'inéquation $x^2 < 4$ a pour ensemble de solutions $]-\infty;2]$.

95. Quelles sont les affirmations justes :

a. L'équation $(\sqrt{2}-1)x = 3/(\sqrt{2}+1)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

b. 1/2, 3 et -1 sont les trois solutions de l'équation $x^3-5x^2/2-2x+3/2 = 0$ dans l'ensemble des réels.

c. L'équation $x^2+9 = 0$ admet deux solutions dans l'ensemble des entiers relatifs.

d. Pour tout réel x différent de -1, -2, 3 on a

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{-5}{(x+2)(x-3)}$$

e. Pour tout réel différent de -3, on a

$$\frac{-2x+7}{x+3} = -2 + \frac{1}{x+3}$$

96. Un élève a obtenu trois notes au cours du 1er trimestre en mathématiques : 16 (coeff. 2), 11 (coeff. 3) et 5 (coeff. 4). Il doit encore composer pour un dernier devoir. Il sait que son professeur donne des coefficients compris entre 1 et 5 (inclus), et arrondit les moyennes au centième de point près. Quelles sont les assertions correctes ?

a. Si le devoir est coefficient 1, il n'aura pas la moyenne quoi qu'il arrive.

b. S'il obtient 10/20, il a tout intérêt à ce que le coefficient du dernier devoir soit 5 plutôt que 1, 2, 3 ou 4.

c. S'il obtient 12/20, il a tout intérêt à ce que le coefficient du dernier devoir soit 3 plutôt que 1, 2, 4 ou 5.

d. Il obtient finalement 12/20 et une moyenne de 10,08. Le coefficient du dernier devoir était donc 2.

e. Le quatrième devoir était coefficient 4 et la moyenne de l'élève vaut 11,46. La note du quatrième devoir était donc 13.

97. A un meeting d'athlétisme, cinq amis se retrouvent : Fred, Soso, Hervé, Oli et Juju. Ils vivent dans cinq villes différentes : Amiens, Bourges, Clermont-Ferrand, Dijon et Evreux. Ils exercent cinq professions distinctes : ingénieur, avocat, professeur, médecin et gérant. Enfin, chacun remporte une des compétitions suivantes : 100 mètres, 400 mètres, 1500 mètres, saut en hauteur et lancer du javelot. Fred qui ne vient pas d'Amiens ne pratique pas la course à pieds. Juju qui n'est pas avocat a remporté le 400 mètres. Oli vient de Clermont-Ferrand et est ingénieur. Le médecin qui vient d'Amiens n'a pas remporté le 100 mètres. Soso qui est professeur à Bourges a remporté le 1500 mètres. L'avocat qui vient d'Evreux ne pratique pas la course à pied. Hervé, gérant à Dijon a remporté le saut en hauteur. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

a. Juju habite à Amiens

b. Fred a remporté le javelot

c. Oli a gagné le 100 mètres

d. Le médecin a gagné le 400 mètres

e. Fred est médecin

98. En France, en 1997, on note N_1 le nombre de candidats au baccalauréat et n_1 le nombre de reçus. De même, en 1988, on note N_2 le nombre de candidats au baccalauréat et n_2 le nombre de reçus. Les taux de réussite correspondants sont notés

$$T_1 = \frac{100\,n_1}{N_1}\ , \quad T_2 = \frac{100\,n_2}{N_2}\ .$$

Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

a. Si on sait que $T_1 = T_2$ et $N_1 > N_2$ alors on en déduit que $n_1 < n_2$.

b. Si on sait que $T_1 < T_2$ et $N_1 > N_2$ alors il est possible que n_1 soit égal à n_2.

c. Si on sait que $T_1 = T_2$ et $N_1 < N_2$ alors on en déduit que $n_2 - n_1 = N_2 - N_1$.

d. Si on sait que $T_1 = T_2$ et $N_1 > N_2$ alors on en déduit que

$$100 \times \frac{n_1 - n_2}{N_1 - N_2} = T_1\ .$$

e. Si on sait que $N_1 = N_2$ et $n_1 < N_2$ alors on en déduit que $T_1 < T_2$.

99. Lors d'un triathlon, j'ai nagé pendant 1/3 du temps et j'ai pédalé pendant les 2/5 du temps. A la moitié du temps que j'ai passé à courir, un autre triathlète, parti en même temps que moi, m'a finalement rattrapé. Il a alors fini à une vitesse moyenne 1,5 fois supérieure à la mienne. Il m'a devancé à l'arrivée de 8 minutes.

a. Au total j'ai pédalé pendant 1h10.

b. Au total j'ai mis 2h40 pour faire le triathlon.

c. L'autre triathlète a mis 3h02 pour faire le triathlon.

d. Au total j'ai nagé pendant 1h.

e. Lorsque l'autre triathlète m'a rattrapé, j'avais pris le départ depuis plus de 2h.

100. Dans une même fratrie composée de garçons et de filles, chaque garçon a autant de frères que de seurs, mais chaque fille a moitié moins de seurs que de frères.

a. Il manque des données pour déterminer le nombre d'enfants.
b. Forcément, il y a 6 garçons.
c. Le nombre de garçons est le double du nombre de filles, moins un.
d. Le nombre de garçons moins un est le double du nombre de filles.
e. Forcément, il y a 3 filles.
f. Impossible.

101. Quel est le pourcentage de remise lorsqu'on fait payer 231 Euro un objet marqué 275 Euro ?
a. 16% **b.** 19% **c.** 20%
d. 22% **e.** 44%

102. Parti à 9h pour escalader le terrible col de l'isoard (27 km de long), j'ai parcouru les 18 premiers km à la moyenne de 15 km/h. La dernière partie était beaucoup plus difficile, et je l'ai effectuée à la vitesse de 10 km/h. Arrivé au sommet, j'ai pris 10mn de repos puis je suis redescendu par la même route. Ma vitesse moyenne dans la descente a été le triple de celle de la montée. A quelle heure suis-je revenu ?
a. 11 h 30 **b.** 11 h 40 **c.** 11 h 58
d. 12 h 02 **e.** 12 h 10 **f.** jamais

103. Luc a acheté un pantalon 40 Euro, qu'il revend à Jean 15% plus cher. Mais ce dernier décide de le revendre 15% moins cher à André. Quel est le prix payé par ce dernier ?
a. 28,8 Euro **b.** 39,1 Euro
c. 40 Euro **d.** 39 Euro

104. Une écriture algébrique de la phrase “la somme du triple de a et du carré du double de b” est
a. $3a + 2b^2$ **b.** $3a + 4b^2$
c. $(3a + 2b)^2$ **d.** $3(a + (2b)^2)$

105. Un monte-charge ne peut pas tracter plus de 1,3 tonnes de marchandise, ni plus de 50 caisses. Les caisses à charger sont des caisses de $20kg$ et de $30kg$. Quelle est, ou quelles sont, parmi les conditions suivantes (où x représente le nombre de caisses de $20kg$ et y le nombre de caisses de $30kg$), celle ou celles qui respecte(nt) les contraintes imposées pour le fonctionnement du monte-charge ?
a. $20x + 30y < 1200$, $x + y < 50$
b. $50(x + y) \leq 1200$, $x + y \leq 50$
c. le monte-charge ne peut pas porter 30 caisses de $20kg$ avec 20 caisses de $30kg$.
d. $2x + 3y \leq 120$, $x + y \leq 50$

106. Soit $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions correctes ?
a. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z = 1$ **b.** $z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$
c. $z^3 = 1 \Rightarrow z = 1$ **d.** $z = 1 \Rightarrow z^2 = 1$

107. Combien l'équation $z^5 = i$ possède-t-elle de racines dans $\mathbb{C}$?
a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3 **e.** 4 **f.** 5

108. Parmi les représentations suivantes de la fraction $\frac{3}{8}$, laquelle est correcte ou lesquelles sont correctes ?

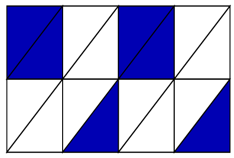


Figure 1

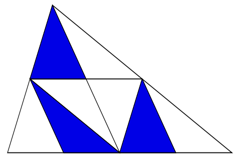


Figure 2

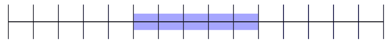


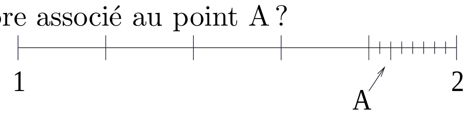
Figure 3

a. Figure 1 **b.** Figure 2
c. Figure 3 **d.** aucune

109. $EYFT$ est un parallélogramme de centre O. Parmi les prpopositions suivantes, lesquelles sont vraies ? $EYFT$ est un losange si et seulement si
a. Les droites (EY) et (TF) sont parallèles.
b. Les droites (OY) et (OF) sont perpendiculaires.
c. Les droites (EF) et (ET) sont perpendiculaires.
d. $EY = ET$
e. Les droites (EF) et (YT) se coupent en O.

110. Combien de bouteilles de 2 litres peut-on remplir avec le contenu d'un container cubique d'arête 40 cm ?
a. 64 **b.** 32 **c.** 6400 **d.** 3200

111. Voici un segment gradué régulièrement. Quel est le nombre associé au point A ?



Quel est le nombre associé à A ?
a. 1,42 **b.** 1,82 **c.** 1,85

112. Combien de zéros contient l'écriture de l'entier $2^5 \times 3^3 \times 5^7 \times 7 \times 100$?
a. 5 **b.** 6 **c.** 9 **d.** 8 **e.** 7 **f.** 10

113. Lors des qualifications du grand prix de San Marin, un pilote effectue un premier tour de circuit à la vitesse moyenne de 210 km/h, puis un second tour à la vitesse de 240 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur les deux tours ?
a. 225 km/h **b.** 230 km/h **c.** 240 km/h **d.** 224 km/h

114. Un collectionneur maniaque de pois chiches rares cherche à les ranger dans des boîtes. Lorsqu'il les range

2 par 2, 3 par 3 ou 4 par 4, il lui en reste toujours un isolé. Excédé, il tente de les ranger 11 par 11, et réussit à en mettre autant dans chaque boîte. Combien a-t-il de pois chiches ?

a. 120 **b.** 60 **c.** 61 **d.** 181 **e.** 121 **f.** 11

115. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont divisibles par 11 ?

a. 111 **b.** 1111 **c.** 10763
d. 93416 **e.** 3261 **f.** 121

116. Un entier naturel x est appelé *nombre parfait* si la somme $s(x)$ de tous ses diviseurs vaut $2x$. Parmi les nombres suivants, lesquels sont parfaits ?

a. 12 **b.** 6 **c.** 15
d. 28 **e.** 1 **f.** 7

117. Quel est le reste de la division Euclidienne de 2^{1000} par 7 ?

a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4 **e.** 5 **f.** 6

118. Deux montres sont mises à l'heure en même temps, le 23 Novembre à 20h00. La première retarde de 5 mn 45 sec par jour, la seconde retarde de 2 mn 15 sec par jour. Quel sera l'écart entre les indications des deux montres le 30 Novembre à 12h00 ?

a. 25mn 20 sec **b.** 23mn 20 sec
c. 25mn 00 sec **d.** 28mn 00 sec

119. a, b, c et d sont quatre entiers relatifs. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

a. Si a divise b et c, alors a^2 divise bc
b. Si a^2 divise bc, alors a divise b et c.
c. Si a divise b et c divise d, alors ad divise bc.
d. Si a et b divisent c, alors l'équation Diophantienne $ax + by = c$ possède toujours des solutions.

120. En effectuant la division Euclidienne d'un entier x par 15, on obtient un quotient égal au double du reste. La plus grande valeur possible de x est

a. 30 **b.** 210 **c.** 99
d. 434 **e.** 224 **f.** va savoir...

121. On note $d = pgcd(435, 345)$ et $m = ppcm(435, 345)$. Le couple (d, m) vaut

a. (15,10005) **b.** (15,150075) **c.** (15,15075)
d. (5,30015) **e.** (1,150075)

122. Le plus petit nombre divisible à la fois par 3,4,5,6,7,8 et 9 est

a. 420 **b.** 2520 **c.** 181440 **d.** 42 **e.** 5040

123. En code bibinaire (système de numération de position en base 16), les 16 symboles sont notés HO, HA, HE, HI, BO, BA, BE, BI, KO, KA, KE, KI, DO, DA, DE et DI. Par exemple, on a $KADO = 9 \times 16 + 12 = 156$. Le produit $HAHA \times DO$ vaut

a. HADO **b.** DADA **c.** DODO
d. HOHO **e.** DAHO