Licence Science et Technologie, 1-ième année, Université de Provence, Année 2008-09

Mécanique du point,
Corrigés de quelques exercices de la fiche 3

I. Projectile, sans frottement

Question 1.

Le projectile est soumis à la seule force de gravitation. On a donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{a} & = & \vec{g} \\ \vec{v}(t) & = & \vec{g}t + \vec{v}_0 \\ \vec{x}(t) & = & \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t \end{array}\right.$$

et donc

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x(t) & = & v_{0x}t & = & v_0 t\cos\alpha \\ y(t) & = & -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t & = & -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha \end{array}\right.$$

C'est la forme paramétrique de la solution. On obtient y en fonction de x en écrivant

$$\begin{array}{lcl} y & = & -\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + x\,\mathrm{tg}\alpha \\ & = & -\dfrac{gx^2}{2v_0^2}(1+\mathrm{tg}^2\alpha) + x\,\mathrm{tg}\alpha \end{array}$$

Question 2.

L'altitude maximale est atteinte pour $v_y(t_S) = 0$, soit $t_S = v_{0y}/g = v_0\sin\alpha/g$. On a alors $x_S = x(t_S) = v_0^2\sin\alpha\cos\alpha/g$, donc

$$t_S = \frac{v_0\sin\alpha}{g}\ ,\quad x_S = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{2g}\ ,\quad y_S = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

Question 3.

Pour des raisons de symétrie (la trajectoire $x \to y$ est une parabole), on peut directement écrire $x_B = 2x_S$ et $t_B = 2t_S$. On obtient aussi ce résultat en résolvant l'équation $y(t_B) = 0$ ou encore en cherchant directement le x tel que $y = 0$.

$$t_B = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\ ,\quad x_B = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}\ ,\quad y_B = 0\ .$$

Question 4.

On voit que la relation exprimant y en fonction de x est l'équation d'une parabole paramétrée par $\tau = \mathrm{tg}\alpha$. Pour qu'un point de coordonnées (X, Y) se trouve sur la trajectoire, il faut et il suffit qu'il existe τ (réel) solution de l'équation

$$Y^2 = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tau^2)X^2 + \tau X\ .$$

Cette équation équivaut à

$$\frac{gX^2}{2v_0^2}\tau^2 - X\tau + \left(Y^2 + \frac{gX^2}{2v_0^2}\right) = 0\ .$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = X^2 - \frac{2g}{v_0^2}X^2\left(Y^2 + \frac{gX^2}{2v_0^2}\right) = X^2\left[1 - \frac{2g}{v_0^2}\left(Y + \frac{g}{2v_0^2}X^2\right)\right]$$

La situation est la suivante :

- Si $Y < v_0^2/2g - gX^2/2v_0^2$, alors $\Delta > 0$, et il existe deux solutions pour τ. Alors le point de coordonnées (X, Y) peut être atteint par le projectile, pour deux valeurs possibles de l'angle α.
- Si $Y = v_0^2/2g - gX^2/2v_0^2$, alors $\Delta = 0$, et il existe une seule valeur de τ (et donc de α) telle que le point (X, Y) puisse être atteint.
- Si $Y > v_0^2/2g - gX^2/2v_0^2$, alors $\Delta < 0$, et il n'existe aucune valeur de τ (et donc de α) telle que le point (X, Y) puisse être atteint.

L'ensemble des points (X, Y) marquant la frontière est donc une parabole, appelée *parabole de sûreté*.

La valeur maximale de X_B est atteinte pour $\alpha = \pi/2$.

Question 5.

Les trajectoires obtenues pour $\alpha = \pi/16, 2\pi/16, \ldots 7\pi/16$ se trouvent en Fig. 1, avec la parabole de sûreté.

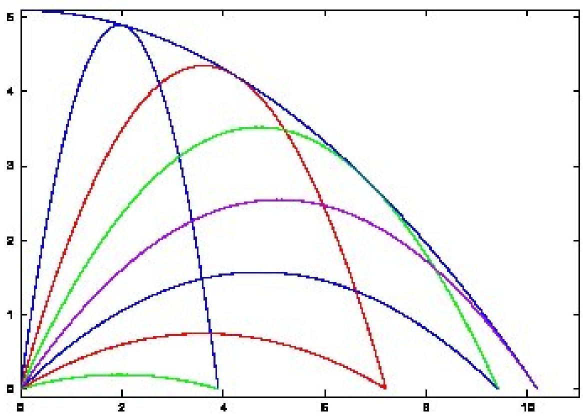

Fig. 1. Trajectoires pour différentes valeurs de α, et parabole de sûreté.

Pour une valeur fixée de v_0, on peut bien les représenter sur une seule figure. Par contre, si v_0 varie, ça n'est plus possible.

II. Projectile, avec frottement

Question 1.

Cette fois, le PFD s'écrit

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \gamma\vec{v}$$

et on a donc à résoudre l'équation différentielle

$$\dot{\vec{v}}(t) + \frac{\gamma}{m}\vec{v}(t) = \vec{g} \ ,$$

dont la solution est de la forme

$$\vec{v}(t) = \vec{c}_0 e^{-\gamma t/m} + \frac{m}{\gamma}\vec{g} \ ,$$

où $\vec{c}_0$ est une constante d'intégration (à 2 composantes). En $t = 0$, on a $\vec{v}_0 = \vec{c}_0 + m\vec{g}/\gamma$, d'où

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-\gamma t/m} + \left(1 - e^{-\gamma t/m}\right)\frac{m}{\gamma}\vec{g}$$

On a donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_x(t) & = & v_{0x}e^{-\gamma t/m} \\ v_y(t) & = & v_{0y}e^{-\gamma t/m} - \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right) \end{array}\right.$$

puis par intégration

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -\frac{mv_{0x}}{\gamma}e^{-\gamma t/m} + A \\ y(t) & = & -\frac{mv_{0y}}{\gamma}e^{-\gamma t/m} - \frac{mg}{\gamma}\left(1 + \frac{m}{\gamma}e^{-\gamma t/m}\right) + B \end{array}\right.$$

En imposant les conditions initiales, on obtient finalement

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{mv_{0x}}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right) \\ y(t) & = & \frac{mv_{0y}}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right) - \frac{m^2 g}{\gamma^2}\left(-1 + \frac{\gamma t}{m} + e^{-\gamma t/m}\right) \end{array}\right.$$

On peut remarquer que dans la limite des petites valeurs de γ (cas « presque sans frottements »), on a en utilisant les développements limités $e^x = 1 + x + x^2/2 + O(x^3)$), on a $1 - e^{-\gamma t/m} \approx \gamma t/m$, et $-1 + \gamma t/m + e^{-\gamma t/m} \approx \gamma^2 t^2/2m^2$ et on retrouve les expressions précédentes. Pour obtenir une expression plus précise, il faut pousser le développement un cran plus loin, à l'ordre 3...

Pour obtenir l'expression non-paramétrique de y en fonction de x, il faut d'abord exprimer t en fonction de x, c'est à dire

$$t = -\frac{m}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{mv_{0x}}\right) \ .$$

On en déduit alors

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x + \frac{mg}{\gamma^2}\left(\frac{\gamma x}{mv_{0x}} + \ln\left(1 - \frac{\gamma x}{mv_{0x}}\right)\right)$$

Là encore, on retrouve l'expression précédente par un développement limité du logarithme à l'ordre 2. En poussant à l'ordre 3, et en se basant sur

$$\ln(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 + O(u^4) \ ,$$

on aboutit, en posant $u = -\gamma x/mv_{0x}$ à

$$\begin{array}{rcl} y & \approx & x\mathrm{tg}\alpha + \frac{mg}{\gamma^2}\left(-u + \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right)\right) \\ & \approx & x\mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{mv_0^2\cos^2\alpha} - \frac{\gamma}{3}\frac{gx^3}{m^2v_0^3\cos^3\alpha} \end{array}$$

On remarque que là encore, la limite $\gamma \to 0$ redonne le cas précédent.

Question 2.

Le sommet est atteint pour $v_y(t_S) = 0$ c'est à dire, en posant $T = e^{-\gamma t/m}$, pour

$$v_{0y}T = \frac{mg}{\gamma}(1 - T) \ .$$

La solution est donnée par $T = 1/(1 + \gamma v_{0y}/mg)$, soit

$$t_S = \frac{m}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{\gamma v_{0y}}{mg}\right) \ .$$

Question 3.

La longueur maximale atteinte est obtenue en écrivant $y = 0$, ce qui conduit à l'équation

$$v_{0y}\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right) = \frac{mg}{\gamma}\left(-1 + \frac{\gamma t}{m} + e^{-\gamma t/m}\right)$$

Cette équation ne possède pas de solution explicite, mais peut être résolue numériquement, ou par approximations, en utilisant un développement limité : en posant cette fois $u = \gamma t/m$, on obtient

$$v_{0y}(u - u^2/2) = \frac{mg}{\gamma}u^2 \ ,$$

d'où pour $u \neq 0$, $u(v_{0y} + mg/\gamma) = 2v_{0y}$, et donc

$$u = \frac{2}{1 + mg/\gamma v_{0y}} \ ,$$

et finalement

$$t_B = \frac{mu}{\gamma} = \frac{2m}{\gamma + mg/v_{0y}} \ ,$$

qui tend vers la valeur de l'exercice précédent quand $\gamma \to 0$.

III. Freinage

1) Pour que le mouvement soit uniforme, l'accélération doit être nulle. On a donc

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = 0 \ ,$$

d'où on déduit, par projection

$$F = mg\sin\alpha$$

Application numérique :
$F = 10^3 \times 9,81 \times \sin(20^o) \approx 3355,2N.$

2) On doit cette fois avoir, avec $\vec{a}$ l'accélération, colinéaire à la force de frottement (dirigée en sens inverse)

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a} \ ,$$

d'où on déduit

$$F = m(g\sin\alpha - a) \ .$$

Application numérique :
$F = 10^3(\times 9,81 \times \sin(20^o) - 2) \approx 3155,2N.$