

Licence Science et Technologie, 1-ième année, Université de Provence, Année 2008-09

Mécanique du point, Corrigés des exercices de la fiche 6

I. DÉFLEXION D'UNE PARTICULE LOURDE PAR UNE PARTICULE LÉGÈRE

Question 1

$\mathcal{L}$ est le référentiel du laboratoire. Par définition, le centre de masse G est tel que

$$(M + m)\vec{OG} = M\vec{OP}_1 + m\vec{OP}_2$$

où on a noté P_1 et P_2 les positions de la particule lourde et la particule légère respectivement. La vitesse $\vec{V}(G)$ du centre de masse est donnée par

$$\vec{V}(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{m}{M + m}\vec{V}$$

car la particule légère est initialement au repos.

Question 2

Le choc étant un choc élastique, on a nécessairement

- Conservation de l'énergie,
- Conservation de la quantité de mouvement.

Par conséquent, on a les relations

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}MV^2 &= \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \\ M\vec{V} &= M\vec{V}' + m\vec{v}'\end{aligned}$$

Question 3

D'après la conservation de la quantité de mouvement, il apparaît que $\vec{V}$ est combinaison linéaire de $\vec{V}'$ et $\vec{v}'$. Ces trois vecteurs sont donc dans le même plan.

Question 4

Par projection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur l'axe Ox et l'axe Oy , on obtient

$$\begin{aligned}MV' \cos \alpha + mv' \cos \beta &= MV \\ MV' \sin \alpha - mv' \sin \beta &= 0\end{aligned}$$

Les quantités à déterminer sont donc v' , V' , α et β , et on ne dispose que de trois équations.

Question 5

Le système étant isolé, la vitesse du centre de masse ne change pas. En effet, calculons

$$\vec{V}'(G) = \frac{m}{M + m}\vec{v}' + \frac{M}{M + m}\vec{V}' = \frac{M}{M + m}\vec{V} = \vec{V}(G)$$

Avec les données numériques, on obtient donc

$$V(G) = V'(G) = \frac{3}{4}V = 1,5 m.s^{-1}$$

1 seconde après le choc, le centre de masse se trouve donc à $1,5 m$ du point d'impact C . La vitesse de G étant orientée parallèlement à l'axe Ox , G se trouve donc sur l'axe. On a ainsi

$$\vec{CG} = 1,5\hat{x}.$$

Par définition du centre de masse, on peut écrire

$$M\vec{GP}_1 = -m\vec{GP}_2,$$

et donc

$$\vec{P_1P_2} = \frac{M + m}{m}\vec{P_1G} = 4\vec{P_1G},$$

ce qui permet de placer P_2 sur la figure.

Notons ℓ_0 la distance (en cm) entre C et P_1 (approximativement $\ell_0 = 3,1 cm$ sur le mien), ce qui correspond à $\ell = CP_1 = \ell_0/2 m$ ($\ell \approx 1,55 m$) sur mon dessin). Par conséquent, la vitesse de P_1 après le choc est

$$V' \approx \ell m.s^{-1}.$$

De là on déduit les autres valeurs : par exemple

$$v' = \sqrt{\frac{M}{m}(V^2 - V'^2)} = \sqrt{\frac{45}{16}} \approx 2,19 m.s^{-1}$$

ainsi que les deux angles.

II. ATOME DE BOHR

A. Analyse dans le référentiel du laboratoire

Question 1

D'après le principe d'action-réaction, on a

$$\vec{F}_{P \rightarrow E} = -\vec{F}_{E \rightarrow P}$$

Question 2

Les seules interactions en présence sont l'interaction électrostatique et l'interaction gravitationnelle. Cette dernière a pour norme

$$\|\vec{F}^{(G)}\| = \frac{Gm_P m_e}{\|\vec{PE}\|^2}.$$

Ainsi, en notant $\vec{F}^{(E)}$ la force électrostatique, on a

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{F}^{(E)}\|}{\|\vec{F}^{(G)}\|} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{Gm_P m_e} \\ &\approx 9.10^9 \times \frac{2,56.10^{-38}}{6,67.10^{-11} \times 1,7.10^{-27} \times 0,9.10^{-30}} \\ &\approx 2,256.10^{39}, \end{aligned}$$

d'où on déduit que l'interaction gravitationnelle est ici complètement négligeable par rapport à l'interaction électrostatique.

L'énergie et la quantité de mouvement totales du système sont conservées.

Question 3

Etant donnée une origine O quelconque, on a

$$(m_e + m_P)\vec{OG} = m_e\vec{OE} + m_P\vec{OP}.$$

Par dérivation, on a aussi

$$\vec{v}_G = \frac{m_e}{m_e + m_P}\vec{v}_E + \frac{m_P}{m_e + m_P}\vec{v}_P.$$

La quantité de mouvement du centre de masse est égale à la quantité de mouvement totale du système, qui est constante. On peut donc associer au centre de masse un référentiel Galiléen.

En prenant le cas particulier $O = P$, on a

$$\vec{PG} = \frac{m_e}{m_e + m_P}\vec{PE}.$$

En norme, on obtient $\|\vec{PG}\| \approx 5,35.10^{-4}\|\vec{PE}\|$, d'où on déduit que le centre de masse peut être confondu avec le proton.

Question 4

On a d'après les propriétés classiques du centre de masse

$$m_e\vec{GE} = m_P\vec{GP}.$$

Par dérivation, on obtient la propriété demandée : en notant $\vec{v}'_E$ et $\vec{v}'_P$ les vitesses par rapport au centre de masse, on a

$$\vec{v}'_E = \frac{m_E}{m_P}\vec{v}'_P,$$

et donc $\|\vec{v}'_E\| \approx 0,54.10^{-3}\|\vec{v}'_P\|$.

B. Analyse dans le référentiel du centre de masse

Question 1

On peut maintenant écrire

$$\vec{f} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Question 2

D'après l'expression du gradient en coordonnées sphériques,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi$$

on voit que $\vec{f}$ dérive d'un potentiel radial, de la forme

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C,$$

où C est une constante qui peut être prise égale à zéro si on décide que le potentiel est nul à l'infini.

Question 3

Le moment cinétique est le moment cinétique orbital

$$\vec{\ell} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

Par dérivation, on obtient

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\vec{v} \wedge \vec{v} + m\vec{OM} \wedge \vec{a} = \vec{OM} \wedge \vec{f}.$$

Or, $\vec{OM}$ et $\vec{f}$ sont colinéaires, donc ce produit vectoriel est nul lui aussi. Par conséquent, $\vec{\ell}$ est constant.

ℓ étant constant, et perpendiculaire à $\vec{OM}$ et $\vec{v}$, on en déduit que le plan défini par $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ est constant.

Question 4

On a déjà vu plus haut que la force est radiale, donc l'accélération aussi. L'accélération tangentielle est nulle, ce qui montre que si le mouvement est circulaire, alors il est circulaire uniforme.

On connaît l'expression de l'accélération radiale :

$$\vec{a} = -\frac{V^2}{r}\hat{r}.$$

D'après le PFD, on en déduit donc

$$V = \sqrt{\frac{rf}{m_E}} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi r m_E \epsilon_0}}$$

Question 5

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle (déjà calculée) et de l'énergie cinétique. Donc

$$E = -\frac{e^2}{4\pi r \epsilon_0} + \frac{1}{2}m_E \frac{e^2}{4\pi r m_E \epsilon_0} = -\frac{e^2}{8\pi r \epsilon_0}.$$

Notons que comme l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique s'annulent à l'infini.

Question 6

La norme du moment cinétique vaut

$$\|\vec{\ell}\| = \sqrt{\frac{r m_E e^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

Donc, d'après l'hypothèse de Bohr, pour un n donné, le rayon correspondant de l'orbite de l'électron vaut

$$r = n^2 \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0 m_E}{e^2} ,$$

et l'énergie

$$E = -\frac{1}{2m_E} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2 \hbar^2}$$

Question 7

On peut écrire

$$E = \frac{E_I}{n^2} ,$$

après avoir posé

$$E_I = -\frac{1}{2m_E} \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar\epsilon_0} \right)^2$$

Comme on l'a vu plus haut, l'énergie mécanique s'annule à l'infini. Donc E_I peut être interprété comme l'énergie nécessaire pour faire passer l'électron de l'orbite $n = 1$ à l'infini, d'où le nom d'*énergie d'ionisation*.