Licence Science et Technologie, 1-ième année, Université de Provence, Année 2008-09

Mécanique du point,
Corrigés du DM 1

I. Spectromètre de masse

Question 1

Si on néglige la force de pesanteur, la seule force en présence est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \ .$$

$\vec{B} = -B\vec{e}_z$ étant perpendiculaire au plan xOy, l'accélération se trouve dans ce plan (attantion : avec cette convention, pn a $B > 0$). Comme la vitesse initiale se trouve dans ce plan $\vec{v}$ aussi. En explicitant les composantes, on aboutit au système

$$\begin{cases} \dot{v}_x(t) &= -\frac{qB}{m} v_y(t) \\ \dot{v}_y(t) &= \frac{qB}{m} v_x(t) \end{cases}$$

Question 2

Posons pour simplifier $\omega_0 = qB/m$. v_x satisfait l'équation différentielle

$$\ddot{v}_x = -\omega_0^2 v_x \ ,$$

dont la solution est de la forme

$$v_x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) \ .$$

En dérivant, on obtient aussi

$$v_y(t) = -\frac{1}{\omega_0}\dot{v}_x(t) = a\sin(\omega_0 t) - b\cos(\omega_0 t) \ .$$

Les conditions initiales imposent $b = 0$ et $a = v_0$, d'où la solution

$$v_x(t) = v_0\cos(\omega_0 t) \ , \quad v_y(t) = v_0\sin(\omega_0 t) \ .$$

Une nouvelle intégration donne

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + C_x \ , \quad y(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t) + C_y \ ,$$

pour des constantes d'intégration C_x et C_y. Les conditions initiales donnent finalement $C_x = 0$ et $C_y = v_0/\omega_0$, d'où la solution

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \ , \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}[1 - \cos(\omega_0 t)] \ .$$

Attention : cette expression provient du choix $\vec{B} = -B\vec{e}_z$, avec donc $B > 0$ et $\omega_0 > 0$. Choisir $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec la même définition de ω_0 conduit à $y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}[\cos(\omega_0 t) - 1]$, mais avec cette fois $\omega_0 < 0$.

Question 2 (autre méthode)

En passant en complexes, et en posant $V = v_x + iv_y$, le système s'écrit

$$\dot{V}(t) = i\omega_0 V(t) \ ,$$

dont la solution est de la forme

$$V(t) = v_0 e^{i\omega_0 t} = v_0\left(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)\right) \ ,$$

qui redonne évidemment la même solution.

Question 3

On peut exprimer y en fonction de x : on a

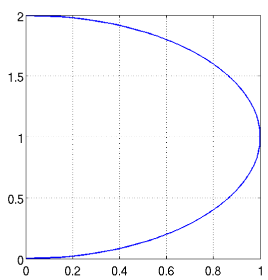
$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \ ,$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $(0, v_0/\omega_0)$ et de rayon v_0/ω_0. En se limitant au cas de figure donné par le graphique ($x \geq 0$), on voit que la fonction

$$y \in [0, 2v_0/\omega_0] \longmapsto x = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 - \left(y - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

est bien définie, mais $x \to y$ n'est pas une fonction : chaque valeur de x est associée à 2 valeurs de y. En séparant les cas $y \leq v_0/\omega_0$ et $y \geq v_0/\omega_0$

$$y = \begin{cases} \frac{v_0}{\omega_0}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0 x}{v_0}\right)^2}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq v_0/\omega_0 \\ \frac{v_0}{\omega_0}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0 x}{v_0}\right)^2}\right) & \text{si } v_0/\omega_0 \leq y \leq 2v_0/\omega_0 \end{cases}$$



Question 4 : application numérique

Le rayon du demi-cercle vaut

$$R = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{v_0 m}{qB} \ .$$

D'après les données du problème, $m = 16 \times 1,66.10^{-27}$, et donc

$$R = \frac{3.10^6 \times 16 \times 1,66.10^{-27}}{1,6.10^{-19} \times 0,6} \approx 0,83\text{m} \ .$$

Ainsi, le diamètre minimal doit être de 1,66 m.

Si la seconde tâche se trouve à 10cm, par exemple 1,56 m, alors la même équation donne

$$R' = \frac{3.10^6 \times X \times 1,66.10^{-27}}{1,6.10^{-19} \times 0,6}$$

où X est la masse exprimée en uma. Une règle de trois donne $R'/R = X/16$, d'où

$$X = 16\frac{R'}{R} = \frac{16 \times 0,78}{0,83} \approx 15 \ .$$

Il s'agit probablement de l'ion CH_3^+. Si la tâche se trouve à l'extérieur (1,76m), alors $X \approx 17$, ce qui correspond à CH_5^+.

II. PERLE, RESSORT ET TOUT ÇA

Avant toute chose, il est utile de préciser les systèmes de coordonnées. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl}\vec{u} & = & \cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\ ,\\ \vec{v} & = & -\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl}\vec{i} & = & \cos\theta\,\vec{u}-\sin\theta\,\vec{v}\ ,\\ \vec{j} & = & \sin\theta\,\vec{u}+\cos\theta\,\vec{v}\ .\end{array}\right.$$

Question 1

Les coordonnées du point P dans la base canonique sont $\overrightarrow{OP}=a(\cos\theta,\sin\theta)$. On a donc dans cette base $\overrightarrow{P\Omega}=-a(1+\cos\theta,\sin\theta)$.

Dans la base de Frénet $(\vec{u},\vec{v})$, on écrit

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{P\Omega} & = & \overrightarrow{PO}+\overrightarrow{O\Omega}\\ & = & -a\vec{u}-a\vec{i}\\ & = & -a\vec{u}-a(\cos\theta\,\vec{u}-\sin\theta\,\vec{v})\\ & = & -a(\cos\theta+1)\vec{u}+a\sin\theta\,\vec{v}\end{array}$$

Question 2

La base $(\vec{u},\vec{v})$ étant orthonormée, on a

$$\begin{array}{rcl}P\Omega & = & a\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}\\ & = & a\sqrt{\cos^2\theta+2\cos\theta+1+\sin^2\theta}\\ & = & a\sqrt{2+2\cos(\theta)}\\ & = & 2a\cos(\theta/2)\ .\end{array}$$

Question 3

Il est utile de calculer tout d'abord

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{\overrightarrow{P\Omega}}{P\Omega} & = & \dfrac{1}{2a\cos(\theta/2)}\left(-a(\cos\theta+1)\vec{u}+a\sin\theta\,\vec{v}\right)\\ & = & -\cos(\theta/2)\vec{u}+\sin(\theta/2)\vec{v}\end{array}$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl}\vec{T} & = & K(P\Omega-\ell)\,\dfrac{\overrightarrow{P\Omega}}{P\Omega}\\ & = & K(2a\cos(\theta/2)-\ell)\left(-\cos(\theta/2)\vec{u}+\sin(\theta/2)\vec{v}\right)\end{array}$$

Question 4

La résultante des forces s'écrit

$$\begin{array}{rcl}\vec{F} & = & \vec{T}+\vec{R}+\vec{P}\\ & = & \left(N+Mg\cos\theta-K[2a\cos(\theta/2)-\ell]\cos(\theta/2)\right)\vec{u}\\ & & +\left(-Mg\sin\theta+K[2a\cos(\theta/2)-\ell]\sin(\theta/2)\right)\vec{v}\end{array}$$

Donc

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=-Mg\sin\theta+K[2a\cos(\theta/2)-\ell]\sin(\theta/2)\ .$$

Question 5

Seule la composante tangentielle travaille ; on a

$$\begin{array}{rcl}E_p & = & C-\displaystyle\int\vec{F}\cdot\overrightarrow{dM}\\ & = & C-a\displaystyle\int\vec{F}\cdot\vec{v}\,d\theta\\ & = & C+Mga\displaystyle\int\sin\theta\,d\theta+Ka\ell\int\sin(\theta/2)\,d\theta\\ & & -Ka^2\displaystyle\int\sin\theta\,d\theta\\ & = & C+(Ka^2-Mga)\cos\theta-2Ka\ell\cos(\theta/2)\end{array}$$

Question 6

Les positions d'équilibre sont données par les minima de l'énergie potentielle, c'est à dire les solutions de

$$-(Ka^2-Mga)\sin\theta+Ka\ell\sin(\theta/2)=0\ ,$$

qui équivaut à

$$-2(Ka-Mg)\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)+K\ell\sin(\theta/2)=0\ ,$$

c'est à dire soit $\theta=0$, soit θ tel que

$$\cos(\theta/2)=\frac{K\ell}{2(Ka-Mg)}$$

Question 7

Pour qu'il existe une position d'équilibre comprise entre 0 et $\pi/2$, on doit donc avoir

$$0\le\frac{K\ell}{2(Ka-Mg)}\le 1\ ,$$

ce qui implique

$$Ka-Mg\ge 0\ ,\quad Ka-Mg\ge\frac{K\ell}{2}\ ,$$

la première inégalité étant une conséquence de la seconde. Notons en particulier qu'on doit nécessairement avoir ici $\ell\le 2a$

Question 8

Calculons

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}=-(Ka^2-Mga)\cos\theta+Ka\ell\cos(\theta/2)/2\ .$$

Pour $\theta=0$, cette quantité vaut

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=-a\left([Ka-Mg]-K\frac{\ell}{2}\right)$$

et est donc positive (ce qui correspond à un minimum de E_p, donc une position d'équilibre stable) dès que $K(a-\ell/2)<Mg$. Ceci est réalisé lorsque $2a\le\ell$, c'est à dire lorsque le ressort est déjà comprimé lorsque son extrêmité est le plus loin possible de son origine, mais aussi lorsque le poids de la perle compense la compression.

Pour $\cos(\theta/2)=K\ell/2(Ka-Mg)$, on a

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} & = & -(Ka^2-Mga)\cos\theta+Ka\ell\cos(\theta/2)/2\\ & = & -(Ka^2-Mga)(2\cos^2(\theta/2)-1)+Ka\ell\cos(\theta/2)/2\\ & = & -a(Ka-Mg)\left(2\left(\dfrac{K\ell}{2(Ka-Mg)}\right)^2-1\right)+\dfrac{aK^2\ell^2}{4(Ka-Mg)}\\ & = & -a\dfrac{K^2\ell^2-4(Ka-Mg)^2}{4(Ka-Mg)}\end{array}$$

D'après ce qui précède, cette quantité est ici positive, donc l'équilibre est stable.

Question 9 : application numérique

Avec les données du problème, on a

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{400\times 0,25}{2(400\times 0,2-2\times 9,81)}\approx 0,82809\ ,$$

d'où

$$\theta\approx 68,194^o\ .$$