Université de Provence
Licence Sc. et Tech.

2008–2009
$1^{\text{ère}}$ année-S2

Mécanique
TD 5

Exercice 1 : Equilibre

On se propose d'étudier la stabilité de l'équilibre d'un point matériel contraint à se déplacer sur un support donné.

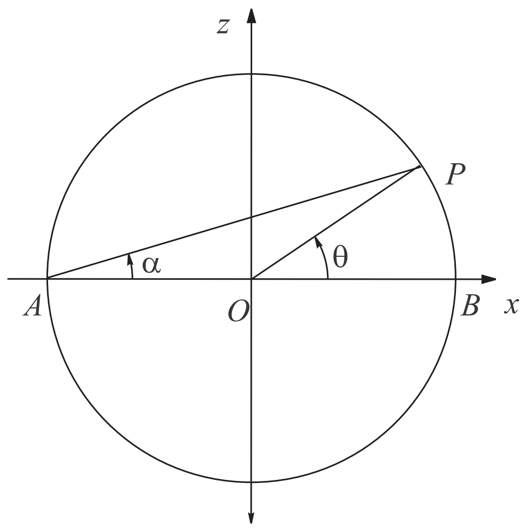

FIGURE 1 –

Une perle, enfilée sur un fil circulaire et rigide peut glisser sans frottement sur ce dernier situé dans un plan vertical. La perle est représentée par un point matériel P de masse m qui se déplace sur une circonférence de centre O et de rayon a. P est également soumis à une force dirigée vers A, extrémité du diamètre horizontal AB, $\overrightarrow{F} = -k\,\overrightarrow{AP}$
(Cette force peut être obtenue par un ressort dont la longueur au repos est négligeable devant AP, quelle que soit la position de P sur la circonférence).

- Partie A -

1. Représenter les forces qui s'appliquent au point P sur quatre schémas distincts correspondants aux quatre cas suivants :

$$0 < \theta < \pi/2, \qquad \pi/2 < \theta < \pi,$$
$$\pi < \theta < 3\pi/2, \qquad 3\pi/2 < \theta < 2\pi.$$

   Observer les quatre schémas et expliquer pourquoi dans certains quadrants l'équilibre n'est pas possible. Indiquer lesquels.

2. Montrer que la relation $\alpha = \theta/2$ n'est valable que si θ est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. En déduire que la base polaire n'est pas adaptée pour traiter ce problème.
3. Exprimer dans la base intrinsèque les différentes forces qui s'appliquent au point P. En déduire les valeurs de θ pour lesquelles l'équilibre est réalisé.

- Partie B -

Ces positions d'équilibre peuvent être retrouvées en faisant une étude des variations de l'énergie potentielle de la bille en fonction de sa position définie par l'angle θ.

1. Vérifier que la force $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_{p1}. Etablir l'expression de E_{p1} en fonction de θ. On considère que cette énergie est nulle lorsque la longueur du ressort est nulle, c'est-à-dire lorsque la perle se trouve en A.
2. Etablir, en fonction de θ, l'expression de l'énergie potentielle E_{p2} dont dérive le poids en prenant l'origine des énergies sur l'horizontale passant par O c'est-à-dire sur le diamètre AB. Etablir alors l'expression de l'énergie potentielle totale E_p de la perle P.
3. De l'expression de E_p déduire les positions de la perle correspondant à des positions d'équilibre et déterminer la stabilité de l'équilibre pour chacune d'elles.

Exercice 2 : Equilibre d'un système masse ressort
Un ressort de coefficient de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 a une de ses extrémités fixée en un point A situé à une hauteur h sur un axe vertical Oy. A l'autre extrémité est fixée une masse m pouvant glisser sans frottement le long d'une tige suivant Ox. La longueur au repos ℓ_0 est strictement supérieure à h.

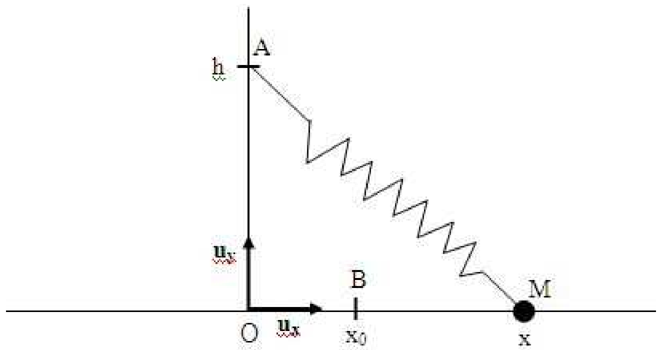

FIGURE 2 –

1. Soit B d'abscisse x_0 la position de la masse M lorsque celle-ci est en équilibre à droite de O (voir figure). Calculer x_0 en fonction de ℓ_0 et h.
2. Représenter sur un schéma les forces qui s'exercent sur M.
3. Calculer l'énergie potentielle en tout point. Représenter qualitativement la courbe de l'énergie potentielle Ep en fonction de x.
4. Rappeler la définition de l'équilibre stable.
5. Le point d'équilibre B est-il stable ou instable ?
6. Pourquoi O est-il aussi un point d'équilibre ? Cet équilibre est-il stable ?
7. Existe-t-il un autre point d'équilibre (stable ou instable ?) sur l'axe Ox ?