Université de Provence
Licence Sc. et Tech.

2008–2009
$1^{\text{ère}}$ année-S2

Mécanique
TD 6

Exercice 1 : Déflexion d'une particule lourde par une particule légère

Une particule lourde de masse M représentée par un point M est animée d'une vitesse $\overrightarrow{V}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{L}$ lié au laboratoire et supposé galiléen. Cette particule heurte une particule légère, au repos, de masse m, représentée par un point m.

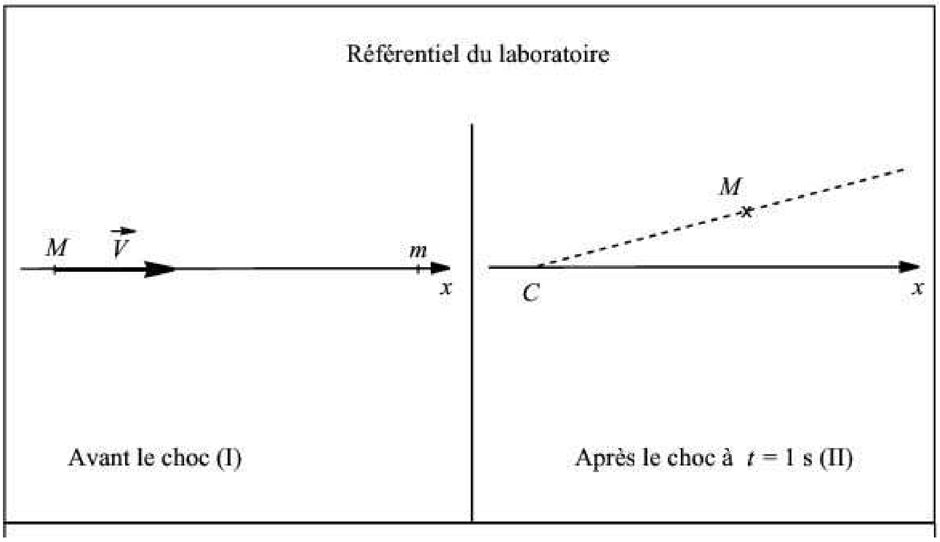

FIGURE 1 – Données : $M = 3, m = 1, V = 2\text{m/s}$

Echelles :
– positions : 1 m $\Longleftrightarrow$ 2cm
– vitesses : 1 m/s $\Longleftrightarrow$ 1 cm
– quantités de mouvement : 1 unité de masse $\times$ 1 m/s $\Longleftrightarrow$ 1 cm

Le repère associé à $\mathcal{L}$ sera tel que le vecteur $\widehat{x}$ soit dans la direction de $\overrightarrow{V}$.

A - Etude du choc dans le référentiel $\mathcal{L}$

1. Déterminer, avant le choc, la position et la vitesse par rapport à $\mathcal{L}$ du centre de masse G du système, constitué par les deux particules, supposé isolé. Représenter sur le schéma (I) G et $\overrightarrow{V}(G)$.
2. La particule M heurte m et est déviée de sa trajectoire. Soient $\overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{v}$' les vitesses respectives de M et m après le choc par rapport à $\mathcal{L}$. Ecrire les relations que l'on obtient lors d'un choc élastique entre M et m, en déduire la vitesse de G après le choc $\overrightarrow{V}'(G)$.
3. Montrer que les trois vecteurs $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V}$', $\overrightarrow{v}$' sont dans un même plan.
4. Projeter la relation vectorielle précédente ; on notera :

– α l'angle formé par $\widehat{x}$ et $\overrightarrow{V}$'
– β l'angle formé par $\widehat{x}$ et $\overrightarrow{v}$'

Comparer le nombre de relations obtenues avec le nombre de variables inconnues et en déduire qu'une de ces dernières peut être choisie arbitrairement.

5. Parmi tous les chocs possibles on en choisit un. Sur le schéma (II) on a fait figurer la position C de ce choc dans $\mathcal{L}$ ainsi que la position de la masse M à un instant $t' = 1$ s après le choc. Tracer sur ce schéma :
   – la position du centre de masse après le choc,
   – sa vitesse $\overrightarrow{V}'(G)$,
   – la position de la masse m après le choc.

   Déduire de la construction les normes de $\overrightarrow{V}$' et de $\overrightarrow{v}$'. Tracer ces deux vitesses ainsi que les quantités de mouvement $M\overrightarrow{V}$' et $m\overrightarrow{v}$'. Vérifier la conservation de la quantité de mouvement lors du choc.

Exercice 2 : Atome d'hydrogène : modèle de Bohr

On donne :
$m_p = 1{,}7\ 10^{-27}$ kg, $m_e = 0{,}91\ 10^{-30}$ kg,
$h = 6{,}63\ 10^{-34}$ J.s, $1/4\pi\epsilon_0 = 9\ 10^9$ S.I., $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C.

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes

A. L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton et d'un électron interagissant entre eux du fait de leur charge électrique.
Soient donc :
- un proton (P) de masse m_p et de charge $+e$.
- un électron (E) de masse m_e et de charge $-e$.

Les positions et les vitesses de ces particules seront définies par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen.

L'électron et le proton s'attirent ; la force électrostatique exercée par l'électron sur le proton est :

$$\overrightarrow{F}_{E\to P} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{\overrightarrow{PE}}{\|\overrightarrow{PE}\|^3}$$

1. Donner l'expression de la force $\overrightarrow{F}_{P\to E}$ exercée par le proton sur l'électron. Représenter sur un schéma les forces $\overrightarrow{F}_{E\to P}$ et $\overrightarrow{F}_{P\to E}$.

2. La force de gravitation étant négligeable comparée à la force électrostatique, montrer que le système proton-électron peut être considéré comme isolé. Que peut-on en déduire au sujet de sa quantité de mouvement et de son énergie ?

3. Prendre une origine O quelconque et exprimer $\overrightarrow{OG}$, le vecteur position du centre de masse G, en fonction des vecteurs position des deux particules.
Donner l'expression de la vitesse du centre de masse.

Dire pourquoi on peut associer à G un référentiel galiléen.
En utilisant les valeurs numériques des masses du proton et de l'électron, montrer que le point G peut être confondu avec le point P ; pour cela, on pourra calculer le rapport PG/PE.

4. Montrer que les quantités de mouvement du proton et de l'électron par rapport au référentiel du centre de masse (d'origine G), ont même norme et sont de sens opposés. En déduire (en utilisant les valeurs numériques des masses) que la vitesse du proton est très petite comparée à celle de l'électron.

B. D'après ce qui vient d'être montré dans la partie A, on voit que l'on peut confondre la position du centre de masse G avec celle du proton supposé fixe et centrer sur ce dernier un référentiel galiléen.
Le proton sera donc placé en O, origine du repère, l'électron sera placé en un point M et on notera :
$OM = r \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = r\,\widehat{r}$

1. Ecrire, avec la nouvelle notation, l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{f}$ exercée par le proton sur l'électron.

2. Montrer que ce champ de force dérive d'une énergie potentielle E_p ; établir l'expression de cette énergie si on prend l'origine des potentiels à l'infini.

3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\ell}$ de l'électron par rapport à O est constant ; en déduire que la trajectoire est plane ; soit Oxy ce plan. On utilisera alors la base cylindrique et on exprimera $\overrightarrow{\ell}$ dans cette base.

4. Une des hypothèses de Bohr suppose que cette trajectoire est circulaire. Montrer qu'elle est alors parcourue d'un mouvement uniforme. Etablir l'expression de $V = \|\overrightarrow{V}\|$ en fonction du rayon r de la trajectoire.

5. Donner l'expression de l'énergie mécanique E de l'électron placé dans le champ de force créé par le proton lorsqu'il décrit une trajectoire circulaire de rayon r.

6. Une autre hypothèse de Bohr est la suivante : parmi les trajectoires circulaires possibles, celles qui sont effectivement décrites par l'électron sont celles qui vérifient la relation $\|\overrightarrow{\ell}\| = n\,\dfrac{h}{2\pi}$ où h est la constante de Planck et n un nombre entier ≥ 1 appelé nombre quantique principal. Donner l'expression de
- $r(n)$, rayon du cercle correspondant au nombre quantique n.
- l'énergie de l'électron sur ce cercle. Vérifier qu'elle varie comme $1/n^2$. Calculer le rayon de l'orbite de l'atome d'hydrogène correspondant à $n = 1$.

7. L'énergie d'ionisation est l'énergie qu'il faut fournir à l'électron pour le faire passer de l'orbite correspondant à $n = 1$ en un lieu où il n'est plus soumis à l'attraction du proton. Donner l'expression de cette énergie pour l'atome d'hydrogène ; la calculer. Comparer avec la valeur expérimentale qui est de 13,6 eV. Commenter alors la validité du modèle de Bohr.