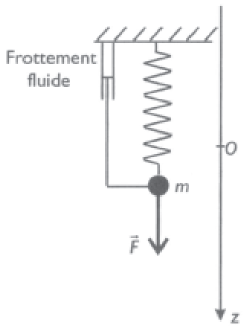
1ère année de Licence
Université de Provence 08-09

TD 7 : Oscillateurs mécaniques

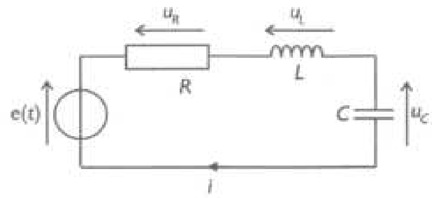
Exercice 1 : Analogie Electro-mécanique

On considère les deux dispositifs suivants : Le système mécanique est constitué d'un corps de masse m, accroché à un ressort de raideur k et de longueur naturelle l_0, soumis à une force de frottement fluide ($\vec{f} = -\lambda\vec{v}$) et subissant une excitation extérieure modélisée par une force verticale de composante F suivant l'axe vertical Oz. On note z la position de la masse m, l'origine étant choisie à la position d'équilibre pour F nulle ; le système électrique est un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale $e(t)$.

Des grandeurs sont dites analogues si elles interviennent de façon similaire dans des équations différentielles de même type.



Circuit mécanique



Circuit électrique

1- Etablir les équations différentielles vérifiées d'une part par la charge q du condensateur dans le circuit RLC, et d'autre part par la côte z de la masse m dans le système mécanique. Déterminer les grandeurs électriques analogues à la côte z, à la force F, à la masse m, à la constante de frottement λ, à la constante de raideur k du ressort, et à la vitesse v.
2- Réponse indicielle : on suppose que $e(t)$ et $F(t)$ sont constantes pour $t<0$ et s'annulent à partir de $t=0$. On observe pour chaque système un régime transitoire pseudo-périodique amorti. Pour les deux systèmes, on mesure un décrément logarithmique identique : $\delta=0.75$, la pseudo-période est $T=1.4ms$ pour le circuit RLC et $1.4s$ pour le système mécanique. Sachant que $m=0.1kg$ et $L=0.01H$, en déduire les valeurs de R, C, k et h.
3- En considérant à présent que $e(t)$ et $F(t)$ sont sinusoïdales, peut-on définir une impédance mécanique ? Quelle est son expression ?

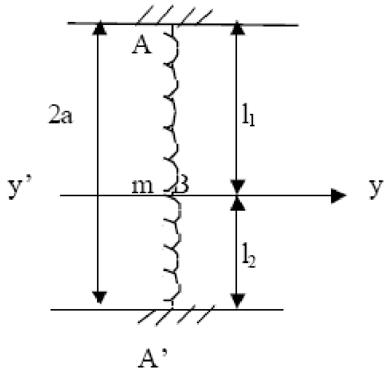
Exercice 2 : L'horloge : un oscillateur entretenu

Une horloge est constituée d'un pendule simple entretenu de période propre $2s$. Pour maintenir l'amplitude des oscillations constante, l'horloge puise son énergie dans l'énergie potentielle d'une masse de $1kg$ descendant d'une hauteur de $1m$ par semaine. $g=9,8\ m\ s^{-2}$. Longueur du pendule $l=1m$.

1. Evaluer le travail des frottements au cours d'une oscillation.
2. La longueur d'un pendule simple peut varier avec la température. Quel est l'allongement Δl acceptable pour que l'horloge indique encore l'heure exacte à $10s$ près au bout d'un jour de fonctionnement ?

Exercice 3 : Système mécanique oscillant

Un point matériel M de masse $m=10g$ est relié à deux ressorts identiques, de raideur $k=15N.m^{-1}$, de longueur à vide $l_0=30cm$, de masse négligeable, placés verticalement. Les extrémités A et A' des ressorts sont fixés et distants de $2a$, avec $a>l_0$. A l'équilibre l_1 est la longueur du ressort AB et l_2 est celle du ressort A'B.



1- A l'équilibre, calculer les longueurs l_1 et l_2 des ressorts en fonction de m, g, a et k. Que peut-on dire si l'on suppose le poids très petit devant 2ka ?
2- Un dispositif assure le guidage de la masse m suivant l'axe $y'y$. Tous les frottements sont négligés et on suppose qu'on peut faire l'approximation : $l_1=l_2=a$. On déplace horizontalement la masse m de y_0 à partir de sa position d'équilibre et on lâche le système sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle du mouvement. Dans le cas où $y_0<<a$, simplifier cette dernière et en déduire l'expression de la période T du mouvement.
3-

Exercice 4 : Portrait de phase

On considère un pendule simple (longueur l, masse m) en régime libre non amorti d'amplitude quelconque.

1- En choisissant l'origine des énergies potentielles à l'équilibre, établir avec les notations usuelles une intégrale première du mouvement (Exprimer e et ω_0 en fonction des données et de l'énergie mécanique E) :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\omega_0^2(1-\cos\theta) = e$$

2- Voici le portrait de phase obtenu avec maple à partir de la relation précédente pour différentes valeurs de e. Décrire le comportement du système pour les trajectoires 1, 2, 3 et 4.